Alkalmazott matematikus szak, első évfolyam, első félév

Első zárthelyi (2001. nov. 8) — megoldásvázlatok

1. Mivel $\overline{z} - i$ nemnegatív valós szám, z képzetes része -1. A z helyébe $x - i$-t írva és a műveleteket elvégezve $|x| = x$ adódik (4 pont). A megoldás tehát az x tengely pozitív irányával párhuzamos, a $(0, -1)$ pontból induló zárt félegyenes (2 pont).

2. A polinomot deriválva $2001(x^{2000} - x^2)$ adódik, ennek keressük az eredeti polinommal közös gyökeit. Ha x ilyen, akkor $x^{2001} = x^3$, ezt az eredeti polinomba visszahelyettesítve $x^3 = 1$ adódik (3 pont). Megfordítva, ha $x^3 = 1$, akkor x nyilván gyöke az eredeti polinomnak és a deriváltnak is (1 pont). Tehát a többszörös gyökök az 1 három köbgyöke, azaz a harmadik egységgyökök (2 pont).

3. Azok az n számok jók, melyek kettővel oszthatók, de néggyel nem. Valóban, ε szöge 360°-nak k/n-szerese, ahol $(k, n) = 1$. Ezért $i\varepsilon$ szöge 360°-nak $(4k+n)/4n$-szerese (2 pont). E tört nevezője $2n$ kell hogy legyen (az egyszerűsítés után). Ezért $2 \mid n$ (1 pont). Így $n/2$ páratlan (különben a törtet kettővel tovább lehetne egyszerűsíteni) (2 pont). Könnyen láthatóan páratlan prímmel $(k, n) = 1$ miatt nem lehet egyszerűsíteni, tehát az ilyen n számok jók (1 pont).

4. Az alaptétel bizonyításában tanult eljárást alkalmazzuk. Az első lépésben σ_2^2-t kell levonni, ekkor $-6\sigma_4 - 2\sum \varepsilon_j^2 \varepsilon_k \varepsilon_\ell$ adódik (2 pont). A következő lépésben ehhez $2\sigma_1\sigma_3$-at kell hozzáadni. Végeredményben a keresett összeg $\sigma_2^2 + 2\sigma_4 - 2\sigma_1\sigma_3$ (2 pont). A megfelelő együtthatókat az $x^{18} - 1$ polinomról leolvasva kapjuk, hogy az eredmény 0 (2 pont). *Másik megoldási ötlet:* Kiindulhatunk az s_2^2-ből is, majd s_4-et a Newton-formulákból megkaphatjuk. *Harmadik megoldási ötlet:* Be lehet látni, hogy az $\varepsilon_j \varepsilon_k$ szorzatok a 18-ik egységgyököket futják be. Így egy mértani sort kapunk.

5. A racionális gyökteszt szerint próbálgatva látjuk, hogy -2 gyöke a polinomnak, az $x+2$ gyöktényezőt kiemelve $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - x + 1$ marad (2 pont). Ide x helyébe $x + 1$-et írva $x^4 + 3x + 3$ adódik, ami a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis (4 pont).

6. Jogosan: nincs ilyen polinom. Ehhez elég belátni, hogy ha f századfokú, és minden egész helyen egész értéket vesz fel, akkor $(100!)^2 f$ már egész együtthatós (a papíron szereplő polinom $(100!)^2$-szerese biztosan nem egész együtthatós, hiszen 101 prímszám). Az f polinomot az azonossági tétel miatt egyértelműen meghatározza a $0, 1, \ldots, 100$ helyeken felvett helyettesítési értéke. Ha kiszámoljuk a megfelelő Lagrange-féle interpolációs polinomot, akkor azonnal látszik, hogy a keletkező nevezők mindegyike osztója $(100!)^2$-nek. (Valójában már 100!-nak is osztója minden nevező.)