Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Első zárthelyi (2001. nov. 8)

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szak**, a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *Mely z komplex számokra teljesül, hogy $|z - i| = \mathrm{Im}(\overline{z})$?*

2. *Soroljuk fel az $x^{2001} - 667x^3 - 666$ polinom összes többszörös gyökeit a komplex számok között.*

3. *Mely n pozitív egészekre igaz a következő állítás: ha ε egy n-edik primitív egységgggyök, akkor $i\varepsilon$ rendje n?*

4. *Számítsuk ki a $\sum \varepsilon_j^2 \varepsilon_k^2$ összeget, ahol $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{24}$ a 24-ik egységgyökök. Az összegezés az $1 \leq j < k \leq 24$ indexekre történik.*

5. *Bontsuk az $x^5 + 7x^4 + 18x^3 + 19x^2 + 4x + 3$ polinomot $\mathbb{Q}$ felett irreducibilisek szorzatára.*

6. *Egy széttépett zárthelyin a következőket olvashatjuk: „Az $x^{100}/101+$" (a polinom többi — alacsonyabb fokú — tagjai a letépett részen vannak) „tetszőleges egész helyen egész értéket vesz fel." Jogosan tépték-e szét a dolgozatot (azaz lehet-e igaz ez az állítás)?*