**Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév**
*Kilencedik alkalom (2001 nov. 22–27)*

**1.** *Határozzuk meg a* $\mathbb{Z}_m^+$ *illetve* $\mathbb{Z}_m^\times$ *csoportok elemeinek a rendjeit, ahol* $m = 7,\ 8,\ 12$.

**2.** *Határozzuk meg a* $g$ *elem rendjét a* $G$ *csoportban, ha* $(g, G)$ *rendre* $(-1, \mathbb{R}^+)$, $(-1, \mathbb{R}^\times)$, $(17, \mathbb{Z}_{19}^+)$, $(17, \mathbb{Z}_{19}^\times)$, $(17, \mathbb{Z}_{32}^+)$, $(17, \mathbb{Z}_{32}^\times)$, $(x+1, \mathbb{Z}_{11}[x]^+)$, $(5, \mathbb{Z}_{11}[x]^\times)$.

**3.** *Legyenek* $a, n, m$ *pozitív egészek, és* $d = (a^n - 1, a^m - 1)$. *Mutassuk meg, hogy* $o_d(a) \mid n$, *és hogy* $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

**4.** *Legyen* $G$ *csoport és* $g \in G$. *Igazoljuk az alábbiakat.*
a) *Ha* $G$ *elemszáma véges, és legalább* 2, *akkor* $G$*-ben van prímrendű elem.*
b) $g$ *akkor és csak akkor hatványa* $g^k$*-nak, ha* $(|g|, k) = 1$.

**5.** *Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, rendjét, és számoljuk meg az inverziókat. Tegyük meg ugyanezt a 'hátulról előre' permutációval is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

**6.** *Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, rendjét és előjelét.*

$$(1234)(35)(1432)(35) = ? \qquad (12345)^{-1}(234)(12345) = ? \qquad [(12)(23)(34)]^{1999} = ?$$

**7.** *Bizonyítsuk be az* $(x_1 x_2 \ldots x_k) = (x_1 x_k)(x_1 x_{k-1}) \ldots (x_1 x_3)(x_1 x_2)$ *összefüggést. Igazoljuk, hogy* $S_n$ *minden eleme előáll legfeljebb* $n-1$ *darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez legalább* $n-1$ *transzpozíció kell? [Használjuk fel, hogy egy* $n$ *pontú összefüggő gráfnak legalább* $n-1$ *éle van.]*

**8.** *Bizonyítsuk be, hogy az* $S_n$ *csoport minden eleme felírható egy olyan soktényezős szorzat alakjában, melynek minden tényezője* $(12)$ *vagy* $(12\ldots n)$.

**9*.** *Egy négy egység oldalú négyzetben 15 egységnégyzet helyezkedik el, ezekre rendre az* $1-15$ *számok vannak írva. A tizenhatodik négyzet helye üres. A kis négyzetek mozgathatók vízszintesen és függőlegesen: az üres négyzet helyére bármelyik szomszédja betolható. A játék célja az, hogy egy véletlenszerűen összekevert állapotból visszaállítsuk az alapsorrendet, azaz azt, amelyben a számok sorfolytonosan, emelkedő sorrendben követik egymást, és az üres négyzet a legalsó sor jobb oldalán van. Bizonyítsuk be, hogy ez a visszaállítás nem lehetséges abból a helyzetből kiindulva, amely az alapsorrendtől csak abban tér el, hogy a 14-es és 15-ös számú négyzetet megcseréljük (az üres négyzet helye is ugyanaz).*

**10.** *Bizonyítsuk be, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.*

**11.** *Mutassuk meg, hogy egy permutáció akkor és csak akkor hatványa egy ciklusnak, ha ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusokat nem írjuk ki).*

**12.** *Hány másodrendű elem van* $S_5$*-ben?*

**13.** *Adjuk meg az összes* $f \in S_n$ *permutációt, melyre* $f \circ (1, 2, \ldots, n) = (1, 2, \ldots, n) \circ f$.

**14.** *Bizonyítsuk be, hogy* $f, g \in S_n$ *esetén akkor és csak akkor létezik olyan* $h \in S_n$, *melyre* $f = h^{-1} g h$, *ha* $f$ *diszjunkt ciklusokra való felbontásakor ugyanannyi, ugyanakkora hosszúságú ciklus keletkezik, mint amikor* $g$*-t bontjuk fel.*