Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Nyolcadik alkalom (2001 nov. 15–20)

1. *Adjunk meg egy olyan polinomot egy alkalmas test felett, melynek van olyan nyolcszoros u gyöke, hogy u a polinom deriváltjának is (pontosan) nyolcszoros gyöke. Igaz-e tetszőleges test felett, hogy ha egy elem egy polinomnak egyszeres gyöke, akkor a deriváltjának biztosan nem gyöke?*

2. *Mutassuk meg tetszőleges test felett, hogy ha az f polinomnak van többszörös tényezője (azaz g^2 alakú osztója, ahol g nem konstans polinom) akkor $(f, f') \neq 1$. Mely p prímekre igaz, hogy $x^n - 1$-nek van többszörös tényezője $\mathbb{Z}_p$ felett?*

3. *Lehet-e egy $\mathbb{Q}$ illetve $\mathbb{Z}_2$ felett irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben?*

4. *Legyen $f(x, y) = x^9 + x^3y^3 + y^2 + y \in \mathbb{C}[x, y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $\mathbb{C}[y]$ hányadostestét.*
  a) Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ feletti polinom?
  b) Következik-e a Schönemann-Eisenstein tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ felett?
  c) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x, y]$-ban?

5. *Általánosítsuk az interpolációt többváltozós polinomokra. Mutassuk meg, hogy véges test esetében minden véges sok változós függvény polinomfüggvény. Mutassuk meg, hogy véges test felett nem érvényes a polinomok azonossági tétele. Adjunk meg minden véges test felett olyan polinomot, amelynek nincs gyöke az adott testben.*

---

6. *Döntsük el az alábbi $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezésekről, hogy művelettartóak-e.*
  a) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(x) = |x|$ (abszolút érték).
  b) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = |x|$ (abszolút érték).
  c) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = e^x$.
  d) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$.
  e) $G_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60x$.
  f) $G_1 = \mathbb{R}[x]$ mint gyűrű, $G_2 = \mathbb{C}$ mint gyűrű, $\varphi(f) = f(i)$.

7. *Igazoljuk, hogy az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ és $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ testek nem izomorfak (a műveletek mindkét esetben a szokásos $\mathbb{C}$-beli összeadás és szorzás).*

8. *Mutassuk meg, hogy a mod m maradékképzés $\mathbb{Z}$-ből $\mathbb{Z}_m$-be művelettartó (mindkét gyűrűműveletre). Vezessük le ebből, hogy $\mathbb{Z}_m$ gyűrű.*

9. *Ha R és S gyűrűk, és $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, akkor mutassuk meg, hogy $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto \varphi(a_0) + \varphi(a_1)x + \cdots + \varphi(a_n)x^n$ is homomorfizmus $R[x]$-ből $S[x]$-be.*

10. *Igazoljuk, hogy az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ alakú számok alkotta gyűrű hányadosteste „valójában” az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ alakú számok teste.*

---

11. *Bontsuk az $x^{12} - 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.*

12*. *Legyen p prímszám, és $n = p^km$, ahol már $p \nmid m$. Mutassuk meg, hogy modulo p a Φ_n egyenlő a $\Phi_m^{\varphi(p^k)}$ polinommal.*

13*. *Igazoljuk, hogy a Φ_n polinom egy alkalmas eltoltjára akkor és csak akkor teljesül a Schönemann-Eisenstein, ha n prímhatvány, vagy egy páratlan prímhatvány kétszerese.*