Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Hetedik alkalom (2001 nov. 8–13)

1. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? A kommutatív gyűrűkben határozzuk meg az invertálható elemeket.*

a) $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ *a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

b) $\mathbb{C}[x]$ *páros fokú elemei és a 0 a polinomok szokásos összeadására és szorzására nézve.*

c) $\mathbb{R}[x]$ *legalább huszadfokú elemei és a 0 a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

d) $\mathbb{C}[x]$ *elemei a szokásos összeadásra, és a kompozícióra, mint szorzásra.*

e) *Tetszőleges Abel-csoport, a szorzást úgy definiáljuk, hogy minden szorzat nulla.*

f) *Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés.*

2. *Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.*

a) *Ha $\circ$ kétváltozós művelet egy A halmazon, akkor csak egy neutrális eleme lehet.*

b) *Ha e neutrális elem a $\circ$ kétváltozós asszociatív műveletre nézve, akkor minden elemnek legfeljebb egy (kétoldali) inverze lehet (e-re nézve).*

c) *Ha S gyűrű, és 0 az összeadás neutrális eleme (azaz S nulleleme), akkor tetszőleges $s,t\in S$ esetén $s*0=0*s=0$ és $(-s)*t=s*(-t)=-(s*t)$.*

d) *Egy egységelemes R gyűrű invertálható elemei a szorzásra nézve csoportot alkotnak.*

3. *Végezzük el $\mathbb{Z}_{17}$-ben a $2/3$ és az $5/12$ osztásokat. Mutassuk meg, hogy ez egy test.*

4. *Mely m-ekre van $\mathbb{Z}_m[x]$-ben olyan polinom, amelynek több gyöke van, mint a foka?*

5. *Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.*

6. *Az $x^4+x^3+x^2+1$ polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

7. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*

a) $\mathbb{Z}_2$ *felett* x^8+x^2+1, x^5+x+1, $x^5+x^4+x^3+1$, x^5+x^3+1.

b) $\mathbb{Z}_{17}$ *felett* x^2+1, x^4+1, x^8+1, $x^{17}+1$, $x^{17}+2$.

---

8. *Legyen $f\in\mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n\geq 1$, p egy prímszám, és $0<k<n$. Legyen $\overline{f}\in\mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) *Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.*

b) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ illetve $\mathbb{Q}$ felett.*

c) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

d) *Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ felett k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.*

e) *Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.*

Adjunk az első Gauss-lemmára és a Schönemann-Eisenstein-tételre új bizonyítást a polinom mod p vizsgálatával.

9. *Legyen $\circ$ asszociatív művelet az A halmazon, és $a,b,c,d,e\in A$.*

a) *Mutassuk meg, hogy $[(a\circ b)\circ(c\circ d)]\circ e=a\circ[\{(b\circ c)\circ d\}\circ e]$.*

b)* *Mutassuk meg, hogy tetszőleges szorzat értéke független a zárójelezéstől.*

10*. *Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ az $a+b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjét a $\mathbb{C}$-beli összeadásra és szorzásra, ahol $a,b\in\mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy ebben végtelen sok invertálható elem van.*