Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Ötödik és hatodik alkalom (2001 okt. 16–26)

Legyen $n \geq 1$ és $\Phi_n(x) = (x - \xi_1)\dots(x - \xi_k)$, ahol $\xi_1, \dots, \xi_k$ az összes primitív n-edik egységgyök (Φ_n az úgynevezett *n-edik körosztási polinom*, és $\varphi(n) = k$ az Euler-függvény). Ekkor $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$, mert

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1\,.$$

Módszerek az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett:

- Egy nem konstans polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és primitív.
- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha nincs racionális gyöke (használjuk a racionális gyöktesztet).
- Bontsuk fel a polinomot $\mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ felett, és használjuk a felbontás egyértelműségét.
- A Schönemann-Eisenstein kritérium.
- f akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in \mathbb{Q}$) az.
- A $\Phi_n(x)$ körosztási polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám (lásd a következő feladatsort).

1. *Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ feletti polinomok körében?*

2. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele.*

3. *Határozzuk meg $\mathbb{R}[x]$-ben, $\mathbb{Q}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}[x]$-ben az egységeket. Teljesül-e $\mathbb{R}[x]$-ben, $\mathbb{Q}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}[x]$-ben, hogy az irreducibilis polinomok pontosan azok a nem nulla és nem konstans polinomok, amelyek nem bonthatók alacsonyabb fokú polinomok szorzatára?*

4. *Bontsuk fel a $6(x^2-2)(x^2+1)$ polinomot $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ felett felbonthatatlanok szorzatára.*

5. *Adjuk meg a $2x^3 + 3x + 5$ polinom racionális gyökeit, és döntsük el, felbonthatatlan-e ez a polinom $\mathbb{Q}$ felett.*

6. *Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x^4 + x + 1$ polinom? És $\mathbb{R}[x]$-ben?*

7. *Irreducibilis-e $x^4 + 4$ illetve $x^4 + 9$ a $\mathbb{Q}$ felett? Általánosítsunk!*

8. *Bontsuk fel az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinomot $\mathbb{R}$ felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ feletti felbontást is.*

9. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium: $x^{11} + 2x + 18$, $x^{11} + 2x + 12$, $x^{11} + 12x + 5$, $x^{11} + n$ (mely n-ekre?).*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor az $(x+y)^p - x^p - y^p$ polinom osztható p-vel $\mathbb{Z}[x,y]$-ban.*

11. *Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein a $\Phi_p(x+1)$ polinomra, ahol p prímszám?*

Fordíts!

12. *Irreducibilis-e $\mathbb{Q}$ felett $x^3+9,\ x^4+1,\ x^4-2x+1,\ x^4+4x+1,\ x^{10}-x^5+1$?*

13. *A $6x^4-9x+1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

14. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*
a) $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}$ *felett* $x^7+x+1,\quad x^2-2,\ x^2+x+1.$
b) $\mathbb{Q}$ *felett* $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2,\ \ 3x^7+x^6+6x^2+2x-2,\ 3x^7-6x^6+6x^2+2x-2,$ $x^{16}+1,\ x^{16}+2,\ x^4-14x^2+9,\ \ x^4-x^2+1,\ 3x^7+6x-18,\ x^5+4.$
c) $\mathbb{Z}$ *felett* $x^4+2x+27,\ 3x^7+6x-18,\ \ x^6+1,\ x^3+7x-3,\ x^4+3x^3+x^2+1.$

15*. *Igazoljuk, hogy az $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha $a_1,\dots,a_n$ páronként különböző egész számok.*

16*. *Van-e olyan $f(x)$ egész együtthatós polinom, hogy minden $g(x)$ egész együtthatós polinomra az $f\big(g(x)\big)$ polinom irreducibilis legyen $\mathbb{Q}$ fölött?*

---

17. *Számítsuk ki Φ_{12}-t kétféleképpen, majd a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.*

18. *Mutassuk meg, hogy ha $n>1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x)=\Phi_n(-x)$.*

19. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $n\geq 1$ egészre $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$.*

20*. *Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát. Általánosítsuk a feladatot!*

21*. *Legyenek $m\mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x)=\Phi_m(x^{n/m})$. Számítsuk ki ennek alapján a $\Phi_n(x)$ polinomokat, ha $n=36,72,144,100$.*

Elméleti gyakorló feladatok

22. *Vezessük le a gyöktényező kiemelhetőségéről szóló állítást a maradékos osztás tételéből.*

23. *Elvégezhető-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x:2$ maradékos osztás?*

24. *Bizonyítsuk be, hogy a kitüntetett közös osztó asszociáltság erejéig egyértelmű. Definiáljuk a kitüntetett közös többszörös fogalmát, mutassuk meg, hogy ez is egyértelmű, és adjunk rá képletet a kanonikus alak segítségével.*

25. *Fogalmazzuk meg precízen, és bizonyítsuk is be, milyen értelemben egyértelmű egy egész együtthatós polinom felbontása egy egész szám és egy primitív polinom szorzatára. Mennyiben egyértelmű egy racionális együtthatós polinom felbontása egy racionális szám, és egy (egész együtthatós) primitív polinom szorzatára?*

26. *Mutassuk meg, hogy az $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ polinomok $\mathbb{Z}[x]$-beli legnagyobb közös osztója a következő módon határozható meg. Alkalmazzuk az euklideszi algoritmust $\mathbb{Q}$ felett, a kapott racionális együtthatós polinomot írjuk fel rh alakban, ahol $r\in\mathbb{Q}$ és $h\in\mathbb{Z}[x]$ primitív polinom. Határozzuk meg f és g együtthatóinak legnagyobb közös osztóját, az eredmény ennek a számnak a h-szorosa. Hogyan módosítható ez az eljárás, ha két $\mathbb{C}[x,y]$-beli polinom legnagyobb közös osztóját keressük?*

27. *Bizonyítsuk be, hogy ha $a,b\in\mathbb{Q}$, és $a\neq 0$, akkor tetszőleges $f\in\mathbb{Q}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha $f(ax+b)$ az. Igaz-e a megfelelő állítás $\mathbb{R}$ felett?*