Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Negyedik alkalom (2001 okt. 9–12)

1. *Határozzuk meg az* $x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4$ *polinom többszörös gyökeit.*

2. *Mely* $b \in \mathbb{C}$ *értékekre van az* $x^n + bx^k + 1$ *polinomnak háromszoros gyöke?*

3****.** *Az* n*-edfokú* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinomnak nincs többszörös gyöke. Lehet-e legalább* n*-szeres gyöke az* $[f']^2 - ff''$ *polinomnak?*

---

4. *Osszuk el maradékosan az* $x^3 - 2$ *polinomot* $2x^2 + 2x - 3$*-mal.*

5. *Mi lesz a maradék, ha az* $x^4 + x^2 + 1$ *polinomot elosztjuk* $x^2 + x + 1$*-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

6. *Mi a maradék, ha* $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$*-et osztjuk* $x^2 + 1$*-gyel illetve* $x^2 - 1$*-gyel?*

7. *Igazoljuk, hogy a* $p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$ *felírásban a* q *együtthatói éppen a Horner-elrendezés alsó sorában szereplő számok.*

8. *Állapítsuk meg az* $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ *és a* $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ *polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt írjuk fel (a szokásos visszahelyettesítési eljárással)* $fp + gq$ *alakban, ahol* p *és* q *alkalmas polinomok.*

---

9. *Adjunk meg olyan polinomot, amelyre* $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 7$ *és* $f(-1) = 0$*.*

10. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy* f *racionális együtthatós? Igaz-e az állítás, ha „racionális" helyett mindenütt „egész" szerepel?*

11***.** *Létezik-e olyan* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *polinom, melyre* $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ *és* $f(18) = 520$*?*

12***.** *Tegyük fel, hogy* n *egész alapponthoz keresünk interpolációs polinomot, és az itt felvett értékek maguk is egészek, de a kapott legfeljebb* $n - 1$*-edfokú interpolációs polinom mégsem egész együtthatós. Lehetséges-e, hogy az interpoláció egy magasabb fokú, de egész együtthatós polinommal is elvégezhető?*

---

13. *Mutassuk meg, hogy ha* $f \in \mathbb{R}[x]$ *és* $z \in \mathbb{C}$*, akkor* z *és* $\overline{z}$ *ugyanannyiszoros gyöke* f*-nek. Igazoljuk, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak mindig van valós gyöke.*

14. *Adjuk meg az összes olyan* $\mathbb{Q}[x]$*-beli tizedfokú polinomot, melynek az* i *ötszörös gyöke.*

---

15. *Az alábbi* p *polinomot bontsuk homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a* p^7 *polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot. Helyettesítsük be mindegyik* x_i *helyére a négy határozatlanú* σ_i *elemi szimmetrikus polinomot, és adjuk meg az eredménynek egy olyan tagját, amelynek nem nulla az együtthatója.*

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = ix_1x_2x_3x_4^2 - x_1^2x_3^3 + 3x_1^3x_2 + \pi x_1^2x_2^3 + x_4 - x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3x_4 - 6x_1^2x_2^2x_4\,.$$

16. *Egy 3-határozatlanú szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja* $x_1^2x_2^2x_3$*. Lehet-e neki tagja* $x_1x_2^3x_3$*? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk fel, mi az eljárás első lépése?*

17. *Igaz-e, hogy szimmetrikus polinom minden homogén komponense is szimmetrikus?*