Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Harmadik alkalom (2001 okt. 2–5)

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések. Ha $f(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$, akkor a σ_k együtthatókat az x_i *elemi szimmetrikus polinom*jainak nevezzük. A σ_k kiszámításához az $x_1, \dots, x_n$ közül az összes lehetséges módon kiválasztunk k darabot, a kiválasztott x_i-ket összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát.*

a) $(x^3 + 3x^2 + 2) - (x^3 + 3x - 4)$.

b) $(x^2 + ix + 3)(x^2 + i)$.

2. *A Horner elrendezés segítségével döntsük el, hogy az* $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ *polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel* $f(x)$*-et* $(x - 2)g(x) + f(2)$ *alakban.*

3. *Hányszoros gyöke az* $x^4 - x^3 - x + 1$ *polinomnak az 1? A Horner-elrendezést használjuk.*

4. *Írjuk fel az* $x^4 + 4$ *polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?*

5. *Mutassuk meg, hogy ha két* n*-edfokú komplex együtthatós polinom* n *(komplex) helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők.*

6. *Legyenek* $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ *az összes* n*-edik egységgyökök.*

a) Bontsuk gyöktényezős alakra az $x^4 - 1$ *polinomot.*

b) Bizonyítsuk be, hogy $x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)\dots(x - \varepsilon_n)$.

c) A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n*-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.*

d) Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n*-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.*

7. *Határozzuk meg a* $2x^4 + 2x + 3$ *polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

8. *Határozzuk meg az* $x^n + x + 1$ *polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét* $(n \geq 2)$.

9. *Legyenek* a, b, c *az* $x^3 + 3x + 1$ *polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei* a^2, b^2, c^2*, illetve* $a + b$*,* $a + c$*,* $b + c$.

10. *Írjuk fel az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként a* $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i^2 x_j$ *összeget.*

11*. *Legyen* f *valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy* f *előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*

Néhány eredmény

8. A reciprokösszeg -1, a köbösszeg $n \geq 3$ esetén $3\sigma_3 + \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$, vagyis az eredmény $n = 2$-re 2, $n = 3$-ra és 4-re -3, $n \geq 5$-re 0.

9. $x^3 + 6x^2 + 9x - 1$ illetve $x^3 + 3x - 1$.

10. $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.