Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Második alkalom (2001 szept. 25–28)

1. *Adjuk meg az* $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^6 = 1 + i$, $x^n = -1$ *egyenletek összes megoldását.*

2. *Mivel egyenlő* $\binom{2001}{0} + \binom{2001}{4} + \binom{2001}{8} + \binom{2001}{12} + \dots$ *?*

3. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin 7x$*-et.*

4*. *Hozzuk zárt alakra a* $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ *összeget.*

5. *Tekintsük az* 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336^\circ) + i\sin(336^\circ)$ *számokat. Mennyi ezek rendje? Melyek egységgyökök? Mely* n*-ekre lesznek ezek a számok* n*-edik egységgyökök? És primitív* n*-edik egységgyökök?*

6. *Ha* ε *rendje osztható néggyel, mi lesz* $-\varepsilon$ *rendje?*

7. *Ha* ε *primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet* $o(-i\varepsilon)$*?*

8. *Mutassuk meg, hogy ha* $n > 0$ *egész,* $\varepsilon \in \mathbb{C}$*, és* $\varepsilon^n = i$*, akkor* $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$*.*

9. *Mutassuk meg, hogy ha* n *páratlan pozitív egész, akkor a* $2n$*-edik primitív egységgyökök épp az* n*-edik primitív egységgyökök ellentettjei. (Először kis* n *számokra ellenőrizzük).*

10. *Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?*

11. *Legyenek* m *és* n *pozitív egészek.*

a) Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ *és* $x^m = 1$ *egyenleteknek?*

b) Igazoljuk, hogy egy n*-edik és egy* m*-edik egységgyök szorzata* nm*-edik egységgyök.*

c) Mutassuk meg, hogy egy n*-edik és egy* m*-edik primitív egységgyök szorzata akkor és csak akkor* nm*-edik primitív egységgyök, ha* m *és* n *relatív prímek.*

12. *Számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

13. *Határozzuk meg a primitív tizenkettedik egységgyökök összegét és szorzatát.*

14. *Mutassuk meg, hogy a* z_1, z_2, z_3, z_4 *páronként különböző komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz a* $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4) = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Big/ \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ *kifejezés valós szám.*

15. *Igazoljuk komplex számok felhasználásával Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza rendre* a, b, c, d, *átlóinak hossza pedig* e *és* f*, akkor* $ac + bd \geq ef$*, és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a négyszög húrnégyszög.*

Megoldás az I/10. feladatra. Legyen $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$, $\eta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$. A szabályos hatszöget felrajzolva látjuk, hogy $\eta = 1 + \varepsilon$ és $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Ha a háromszög csúcsai A, B, C, és X jelöli az AB oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög középpontját, akkor az $\overrightarrow{XB}$ vektort 120 fokkal elforgatva az $\overrightarrow{YB}$ adódik, azaz $(B-X)\varepsilon = A-X$, ahonnan X kifejezhető. Analóg módon írhatjuk fel a keresett másik két pontot is, legyenek ezek Y és Z. Azt kell belátni, hogy az $\overrightarrow{XY}$ vektort 60°-kal elforgatva az $\overrightarrow{XZ}$-t kapjuk, azaz $(Y-X)\eta = (Z-X)$. Behelyettesítve, és A, B, C szerint rendezve, a fenti két azonosságból az adódik, hogy A, B és C együtthatója is nulla.