Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Tizedik, tizenegyedik és tizenkettedik alkalom (2001 nov. 29 – dec. 18)

1. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned} \qquad \text{HF:} \qquad \begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

Homogén	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

3. *Van-e olyan egész együtthatós lineáris egyenletrendszer, ami $\mathbb{Q}$ felett ellentmondásos, $\mathbb{Z}_2$ felett egynél több megoldása van, és $\mathbb{Z}_3$ felett pontosan 1?*

4. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?*

5. *Adott n szám úgy, hogy közülük bármely $n-1$ összege 2001. Melyek ezek a számok? HF: adott $a \neq b$ számok esetén oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + b\,x_n &= 1 \\ a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + b\,x_{n-1} + a\,x_n &= 2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + a\,x_n &= n \end{aligned}$$

6. *Számítsuk ki az alábbi szorzatokat. Szorozzunk össze két általános, csupa egyesekből álló mátrixot is. Keressünk olyan kétszer kettes mátrixokat, melyek négyzete nulla.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

7. *Jelölje F_α a síkon az origó körüli, pozitív irányú, α szögű forgatást, és $T_{a,b}$ az $ax+by=0$ egyenesre való tükrözést. Mi lesz az (x,y) pont képe ezeknél a transzformációknál? Milyen geometriai transzformáció lesz $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T_{a,b}$, $T_{a,b} \circ F_\alpha$, $T_{a,b} \circ T_{c,d}$?*

Összesen 4 oldal!

8. *Legyen A a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, B pedig az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi lesz ezeknél az $(1,2,3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $A \circ B = B \circ A$?*

9. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. *Mutassuk meg, hogy ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - tr(M)M + \det(M)E = O$.*

11. *Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -I$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = I$ egyenlet összes megoldását.*

12. *Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Az utolsó invertálás házi feladat. Írjuk fel a második és harmadik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor szerinti kifejtéssel, majd az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, végül a felső háromszög alakra hozás módszerével is.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

14. *Írjuk fel az általános kétszer kettes, majd a háromszor hármas determináns képletét a determináns definíciója alapján. Mutassuk meg, hogy a háromszor hármas determináns értéke nulla lesz, ha két oszlopa egyenlő. Mutassuk meg azt is, hogy a háromszor hármas determináns, mint a második oszlopvektorának függvénye, összegtartó.*

15. *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

16. *Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

17. *Egy determináns egyik kifejtési tagját tükrözzük a determináns mellékátlójára. Hogyan változik meg a megfelelő permutációban az inverziók száma?*

18. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.*

19. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

20. *A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi három egyenletrendszert egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk is meg őket $\mathbb{R}$ felett.*

$$\begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 2 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + \qquad x\cdot y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 1 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + \qquad x\cdot y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+1 = 2y \\ y^2+1 = 2z \\ z^2+1 = 2x \end{cases}$$

Vegyes gyakorló feladatok

21. *Mi lesz* $(12)(234)(456)(15)(34)$ *ciklusfelbontása, rendje és előjele?*

22. *Hány hatodrendű elem van S_7-ben?*

23. *Lehet-e S_5 két negyedrendű elemének szorzata negyedrendű?*

24. *Melyik az a legkisebb n szám, melyre S_n-ben van páros,* 12 *rendű permutáció?*

25. *Írjuk fel az* (123456789) *ciklust az S_9 alkalmas ötödrendű elemeinek szorzataként.*

26. *Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes $\mathbb{R}$-beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet $\mathbb{C}$ felett?*

27. *Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?*

28. *Az M és N mátrixok* felcserélhetők, *ha $MN = NM$. Határozzuk meg azokat az $n\times n$-es mátrixokat tetszőleges test fölött, amelyek minden $n \times n$-es mátrix-szal felcserélhetők.*

29. *Legyen $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Határozzuk meg az $MN - NM$ nyomát. Bizonyítsuk be, hogy $MN - NM = I_n$ lehetetlen. Igaz marad-e az állítás tetszőleges test fölött?*

30. *Legyen $M, N \in T^{n\times n}$, ahol T test. Mutassuk meg, hogy ha $MN = M$ és $NM = N$, akkor mindkét mátrix* idempotens *(azaz $N^2 = N$, illetve $M^2 = M$).*

31. *Legyen $M \in T^{n\times n}$, ahol T test. Bizonyítsuk be, hogy ha M idempotens, akkor $N = I - M$ is az, és $MN = NM = O$.*

32. *Igazoljuk, hogy az M négyzetes mátrix akkor és csak akkor* involúció, *azaz $M^2 = I$, ha $(I + M)(I - M) = O$.*

33. *Egy* 2001×2001*-es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?*

34. *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

35. *Van-e olyan* $123456789 \times 123456789$*-es mátrix, melyben csak a 0 és 1 számok szerepelnek, és determinánsa 2?*

36. *Legyen* T *test,* $A \in T^{k\times k}$, $B \in T^{m\times m}$, $X \in T^{k\times m}$ *és* O *az* $m \times k$*-s nullmátrix. Rakjuk össze az* M *mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen:*

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix}$$

Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$. *Vezessük le ebből az állításból, hogy háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata. Vezessük le a kifejtési tételt is!*

Nehezebb feladatok

37*. *Egy* n*-szög csúcsaira számokat akarunk úgy írni, hogy bármelyik csúcsból induljunk is el a sokszög mentén, a sorra következő* m *szám összege 1 legyen. Mely* m *és* n *értékek esetén lehetséges ez úgy, hogy valamelyik csúcsra* $1/m$*-től különböző szám kerüljön?*

38. *Páratlanországban mindenki páratlan sok embernek küldött karácsonyi ajándékot. Bárhogy is választunk ki két különböző embert, azok száma, akiknek ők mindketten küldtek ajándékot, páros. Mutassuk meg, hogy mindenki páratlan számú ajándékot kapott.*

39. *Legyen* M *egész számokból álló négyzetes mátrix.*

a) *Igazoljuk, hogy* M^{-1} *akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha* $\det M \in \{1, -1\}$.

b) *Bizonyítsuk be, hogy* $\det M$ *akkor és csak akkor páros, ha kiválasztható néhány sor úgy, hogy ezeket összeadva a kapott vektor csupa páros számot tartalmaz.*

40*. *A sakkbajnokság félidejénél azt tapasztalták, hogy nem lehet kiválasztani úgy néhány játékost, hogy bármelyik játékos (a közülük valók is) ezek ellen összesen egész számú pontot szerzett. Igazoljuk, hogy a résztvevők száma páros (mindenki mindenkivel egyszer játszott, győzelem:* $1-0$*, döntetlen:* $0.5-0.5$*, saját maga ellen mindenki nulla pontot szerzett.)*

41*. *Bizonyítsuk be, hogy ha* M *nilpotens (azaz négyzetes, és van olyan* m *természetes szám, amire* $M^m = O$*), akkor* $(I - M)$*-nek létezik inverze.*

42.** *Legyen* $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, *és* ε_j *a* $2\pi j/n$ *szöghöz tartozó* n*-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)\cdot f(\varepsilon_1)\cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_{n-1})\,.$$

43*. *Legyen* $p > 2$ *prím, és tekintsük az* $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{p-2}x^{p-2} \equiv 0\ (p)$ *kongruenciát, ahol* $p \nmid a_0$. *Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0\ (p)\,.$$