Matematikus szak, első évfolyam, második félév
Második zárthelyi — megoldásvázlatok

1. A mátrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ennek sajátértékei 0 és $\pm\sqrt{2}$, ezek között pozitív és negatív is van, tehát az alak indefinit (4 pont). A legnagyobb sajátérték a $\sqrt{2}$, ezért az origótól vett távolság $1/\sqrt[4]{2}$ (2 pont).

2. A lapokkal párhuzamos, a kocka középpontján áthaladó síkra való (összesen három) tükrözés biztosan szinezéstartó szimmetria, és ilyenekkel a csúcsok egymásba vihetők, tehát a keresett G csoport tranzitívan hat a csúcsokon. Viszont mindegyik csúcs stabilizátora már csak az identitásból áll, hiszen a lapok a helyükön maradnak. Tehát $|G| = 8$ (3 pont). Bármely két fent említett síkra tükrözés szorzata egyenesre való tükrözés lesz, ilyenből is három darab van, végül a három lapra tükrözés szorzata a kocka középpontjára tükrözés. Ezzel az összes elemet megtaláltuk, mindnek a rendje 2, kivéve az egységelemet (3 pont).

3. Nyolcelemű. Ha ugyanis egy négyzet csúcsait körbeszámozzuk az 1, 2, 3, 4 számokkal, akkor a megadott két permutáció egy 90°-os forgatás, illetve egy átlóra tükrözés lesz. Tudjuk, hogy ezek a teljes D_4 csoportot generálják (6 pont). Az állítás persze közvetlen számolással is kihozható.

4. A D_6 csoport centruma $\{e, f^3\}$, ezért a keresett csoport hatelemű (3 pont). Ez a csoport S_3-mal izomorf (3 pont). Ez például következik az elemrendek vizsgálatából (elég megnézni, hogy nincs hatodrendű elem, hiszen a hatelemű csoportokat ismerjük). De következik abból is, hogy a D_3-mal izomorf $\langle t, f^2\rangle$ részcsoport reprezentánsrendszert alkot.

5. Ha Q negatív szemidefinit, akkor ez az altér nyilván nulla. Ellenkező esetben viszont az egész tér. Ha ugyanis $b_1, \ldots, b_n$ egy Q-ortogonális bázis, melyre $Q(b_1) > 0$, akkor minden b_j ($j \geq 2$) vektorhoz választhatjuk λ-t olyan „nagyra”, hogy $Q(\lambda b_1 + b_j) = |\lambda_1|^2 Q(b_1) + Q(b_j)$ pozitív, azaz $\lambda b_1 + b_j \in W$ legyen. Így $b_1 \in W$ miatt $b_j \in W$.

6. Igen. Az $A - A^*$ normális transzformáció, hiszen az adjungáltja az ellentettje. Válasszuk úgy az ortonormált bázist, hogy ez diagonálissá váljon. Ekkor $i \neq j$ esetén $0 = \langle (A - A^*)b_i, b_j\rangle = \langle Ab_i, b_j\rangle - \langle b_i, Ab_j\rangle = \langle Ab_i, b_j\rangle - \overline{\langle Ab_j, b_i\rangle}$.

7. Igaz. Legyen $|G : H| = 3$, és jelölje $H = H_1$, H_2, H_3 a három H szerinti bal mellékosztályt. Belátjuk, hogy $h \in H$ esetén $hH_i = H_i$. Ez nyilvánvaló $i = 1$-re, és mivel a h-val való balszorzás bijekció, ha nem lenne igaz, akkor $hH_2 = H_3$ és $hH_3 = H_2$ lenne. Ebben az esetben $h^n H_2 = H_2$, és $h^n H_3 = H_3$ minden páros n-re. De h rendje páratlan (hiszen $|G|$ az), és így $n = |h| + 1$ választással ellentmondásra jutnánk. Beláttuk tehát, hogy tetszőleges $g \in G$ esetén $hgH = gH$, azaz $g^{-1}hg \in H$, tehát H normálosztó.