Matematikus szak, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi — megoldásvázlatok

1. A mátrix felbontása

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. A karakterisztikus polinom x^2+1, a sajátértékek $\pm i$, a sajátvektorok $(2 \pm i, -1)^T$ (és skalárszorosaik), az 1999-edik hatvány a mátrix ellentettje. Ez utóbbi állítás nemcsak számolással következik, hanem a Cayley-Hamilton tételből is.

3. A karakterisztikus polinom x^4, ezért a minimálpolinom x^k $(1 \le k \le 4)$. De a mátrix köbe még nem nulla, ezért a minimálpolinom is x^4 (4 pont). A Jordan-alak tehát egyetlen blokkból áll, a főátlóban nullákkal, különben már a mátrix köbe nulla lenne (2 pont).

4. Ellenpélda: $b_1, \ldots, b_4$ bázis V-ben, $V_1 = \langle b_1, b_2 \rangle$, $V_2 = \langle b_3, b_4 \rangle$, $W = \langle b_1, b_3, b_2 + b_4 \rangle$.

5. 98. Az alacsonyabb fokú „ilyen” polinomokat is lehet generálni (2 pont). Az $(x-2)^{2i}$ $(i = 1, 2, ..., 50)$ és az $(x-2)^{2i+1} - (x-2)^3$ $(i = 2, 3, \ldots, 49)$ polinomok rendszere csupa különböző fokú, és ezért független, tehát a dimenzió legalább 98 (2 pont). Az összes „ilyen” polinomok 101-dimenziós alterét háromszor csökkentettük (2 pont). *Második megoldás:* Legyen $A(f) = (f(2), f'(2), f(1) - f(3))$. Ennek magja a kívánt altér, viszont számolással láthatóan A szürjektív, tehát a dimenziótételből $101 - 3$ jön ki.

6. Igen. Ugyanis a minimálpolinom osztója $x^3 - x$-nek, és így mindegyik gyöke egyszeres, tehát a transzformáció diagonalizálható. Mivel a minimálpolinom gyökei a sajátértékek, legfeljebb három sajátérték van, tehát van legalább kétdimenziós sajátaltér.

7. 400. A konstrukció: ötösével beosztjuk egy bázis elemeit, és minden egyes $\{b_1, \ldots, b_5\}$ blokkon belül legyen $A(b_i) = b_{i+1}$ illetve $A(b_5)=0$ (2 pont). A becslés: legyen $V_i = \mathrm{Ker}(A^i)$, ekkor $\{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_5 = \mathbb{C}^{2000}$. Legyen $\dim(V_1) = k$ és A_i az A leképezés V_i-re vett leszűkítése. Ekkor $V_1 \subseteq V_i$ miatt $\mathrm{Ker}(A_i) = V_1$, továbbá nyilván $\mathrm{Im}(A_i) \subseteq V_{i-1}$. A dimenziótétel miatt tehát $\dim(V_i) \le \dim(V_{i-1}) + k$. Így $2000 \le 5k$ (4 pont). A becslés a Jordan-alakból is látszik, hiszen minden blokk legfeljebb 5×5-ös, de minden blokkhoz tartozik sajátvektor.