Matematikus szak, első évfolyam, második félév
Első zárthelyi

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Mindegyik feladat hat pontot ér, az osztályzat elégtelen, ha nincs lényegében megoldott feladat (azaz ami legalább öt pontot kapott), különben pedig az összpontszám hatodrészének egész része.

1. *Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló vektortér $\mathbb{R}$ felett az 1, $1+x$, $1+x+x^2$, $1+x+x^2+x^3$ bázissal, U pedig az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^{1\times 3}$ vektortér az $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ bázissal. Tekintsük azt az $A : V \to U$ lineáris leképezést, amelyre $p \in V$ esetén $A(p) = (p(1), p(-1), p(1) - p(-1))$. Írjuk fel A mátrixát a megadott bázispárban (azt nem kell belátni, hogy ezek tényleg bázisok), és bontsuk fel a kapott mátrixot rangnyi számú diád összegére.*

2. *Számítsuk ki az*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix komplex sajátvektorait, és 1999-edik hatványát.

3. *Adjuk meg annak a 4×4-es mátrixnak a minimálpolinomját és a Jordan-alakját, amelyben a főátló alatt csupa 1-es, a többi helyen nulla áll.*

4. *Egy V vektortér a V_1 és V_2 altereinek direkt összege. Tegyük fel, hogy W is altere V-nek, ami V_1-et és V_2-t is egydimenziós altérben metszi. Következik-e ebből, hogy $\dim W = 2$?*

5. *Tekintsük $\mathbb{Q}[x]$-ben azokat a pontosan századfokú f polinomokat, melyeknek a 2 legalább kétszeres gyöke, és $f(1) = f(3)$. Mennyi ennek a polinomrendszernek a rangja?*

6. *Végtelen sok invariáns altere van-e minden olyan $B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ lineáris transzformációnak, melyre $B^3 = B$ teljesül?*

7. *Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{2000})$, melynek minimálpolinomja x^5. Hány dimenziós legalább az A magtere? (A minimális értékre példát is kell adni!)*