Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév
A csoportelmélet feladatok megoldásvázlatai

IX/1. Az S_3 részcsoportjai 1, 2, 3 és 6 eleműek lehetnek ($|S_3| = 6$ osztói). Nyilván csak $\{id\}$ lesz 1 rendű és csak az egész S_3 lesz 6 rendű. Egy másodrendű részcsoportban csak első és másodrendű elemek lehetnek a Lagrange tétel miatt, vagyis egy darab első, és egy darab másodrendű elem fér el. Ezért a kételemű részcsoportok $\{id, (12)\}$, $\{id, (13)\}$, $\{id, (23)\}$. Harmadrendű részcsoportban csak harmad- és elsőrendű elem lehet. Elsőrendű elem csak az id. Ha van egy f harmadrendű, akkor f, f^2, $f^3 = id$ kiadják az egész részcsoportot. Csak két harmadrendű elem, és így csak egy harmadrendű részcsoport van, az $\{id, (123), (132)\} = A_3$. A $H = \{id, (12)\}$-höz tartozó baloldali mellékosztályok $id \cdot H = (12)H = H$, $(13)H = (123)H = \{(13), (123)\}$ és $(23)H = (132)H = \{(23), (132)\}$, a jobboldaliak pedig $H \cdot id = H(12) = H$, $H(13) = H(132) = \{(13), (132)\}$ és $H(23) = H(123) = \{(23), (123)\}$. Negyedrendű részcsoportban az elemek rendje 1, 2 és 4 lehet. Ha van negyedrendű elem, ennek hatványai négyen vannak, tehát kiadják a részcsoportot. De az A_4 csoportban nincs negyedrendű elem, mert a négyesciklus pártalan permutáció. Ha a részcsoportban nincs negyedrendű elem, akkor az egységelemen kívül három másodrendű elemnek kell szerepelnie. Az A_4 másodrendű elemei $(12)(34)$, $(13)(24)$ és $(14)(32)$, tehát az egyetlen lehetőség, hogy ezek alkotnak az egységelemmel negyedrendű részcsoportot. A szorzásokat elvégezve látjuk, hogy ezek tényleg részcsoportot alkotnak.

IX/2. Ez az index n. Ugyanis az $a + n\mathbb{Z}^+$ és $b + n\mathbb{Z}^+$ mellékosztályok akkor és csak akkor egyeznek meg, ha $a - b \in n\mathbb{Z}^+$, azaz ha $a \equiv b\ (n)$. Tehát minden szám mellékosztálya ugyanaz, mint az n-nel való osztási maradékának a mellékosztálya, de a $0, 1, \ldots, n-1$ maradékok csupa különböző mellékosztályban vannak.

IX/3. a) A páros számok részcsoportja. Ugyanis ez nyilván a 28 és 34 számokat tartalmazó részcsoport. Megmutatjuk, hogy ez a legszűkebb, vagyis ha $H \leq G$, $28, 34 \in H$, akkor H minden páros számot tartalmaz. Valóban, $2 = (28, 34) = 28x + 34y$ alakban írható, ahol x, y egész, és ezért $2 \in H$. Tehát H tényleg minden páros számot tartalmaz. b) Az eredmény A_4. Ebben az adott elemek benne vannak. Tegyük fel, hogy H az adott elemeket tartalmazó részcsoport, meg kell mutatni, hogy A_4 minden eleme H-beli. Ezt meg lehetne úgy mutatni, hogy A_4 minden elemét kifejezzük (123) és $(12)(34)$ segítségével. De Lagrange tétele miatt $|H|$ osztója $|A_4| = 12$-nek, tehát elég 7 elemet kifejezni. Nyilván $(12)(34)$, id, (123), $(132) = (123)^2$, $(243) = (12)(34)(123), (234) = (243)^2$, $(124) = (123)(243) \in H$. c) A $2^n 3^m$ alakú valós számok, ahol n és m egészek. d) Azok a mátrixok, melyek determinánsa 2-hatvány. Ezek a determinánsok szorzástétele miatt részcsoportot alkotnak, ami minden 2 determinánsú mátrixot tartalmaz. Tehát elég belátni, hogy minden ilyen mátrix kifejezhető 2 determinánsúakkal. Ha $\det M = 2^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), akkor legyen N tetszőleges 2 determinánsú mátrix és $K = MN^{-n+1}$. Ekkor nyilván $\det K = 2$ és $M = KN^{n-1}$. e) Legyen H a keresett részcsoport. Rajzoljunk egy gráfot az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon: b és c akkor legyen összekötve, ha $(bc) \in H$. Elég belátni, hogy ez a gráf összefüggő, mert ha (ab) és (bc) is élek, akkor $(ac) = (ab)(bc)(ab)$ is az (és minden permutáció transzpozíciók szorzata). De $(i+1, i+2) = (12\ldots n)^i (12)(12\ldots n)^{-i} \in H$ (vö. X/19 is).

IX/4. A csoport elemszáma IX/16/c szerint $2n$, ez n forgatás, és n egyenesre való tükrözés (az egyenesek páratlan n esetén oldalfelező merőlegesek, páros n esetén ezeken kívül még átlók). A forgatások az f^i elemek, és nyilván tf^i tükrözés (nem forgatás, mert $tf^i = f^j \implies t = f^{j-i}$, márpedig t nem forgatás). A felsorolt elemek páronként különbözők (mert $tf^i = tf^j \implies f^i = f^j$, és tükrözés nem egyenlő forgatással). Ezért ez a $2n$ elem a D_n összes elemét kiadja. De $f^i t$ is tükrözés, így $(f^i t)^2 = id \implies f^i t = (f^i t)^{-1} = tf^{-i}$.

IX/5. D_5-ben az egész csoportot kapjuk. Valóban, $(f^2)^3 = f^6 = f$, vagyis $f \in \langle f^2, t\rangle$. De az előző feladatban láttuk, hogy f és t az egész csoportot generálja. D_6-ban egy hatelemű részcsoportot kapunk, ebben f^i és tf^i szerepel, ahol i páros. Ezek valóban részcsoportot alkotnak, mert ez a hatszögbe beírt (bármelyik) szabályos háromszög szimmetriacsoportja.

IX/6. Ha $H = AB$ részcsoport, akkor $H^{-1} = H$, de $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ miatt $AB = H = H^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$. Megfordítva, ha $H = AB = BA$, akkor $HH = ABAB = AABB = AB = H$ és $H^{-1} = (AB)^{-1} = BA = AB = H$, tehát H részcsoport. Elemekkel is számolhattunk volna, úgy hosszabb.

IX/7. Az $(ab)^2 = e$ összefüggést balról a-val, jobbról b-vel szorozva $aababb = ab$ adódik. De $a^2 = e = b^2$, és így $aababb = ba$. Tehát G Abel. Negyedik hatványra a négyzet szimmetriacsoportja ellenpélda.

IX/8. Nem. Ha ε egy 3^n-edik egységgyök, akkor az általa generált részcsoport véges, elemszáma legfeljebb 3^n. Tehát nem lehet az egész csoport, aminek végtelen sok eleme van.

IX/9. Tegyük fel, hogy adott véges sok tört. Megmutatjuk, hogy ezek együtt nem generálhatják $\mathbb{Q}$ additív csoportját. Vegyünk egy olyan p prímet, ami a törtek egyikének a nevezőjét sem osztja. Ekkor $1/p$ nem fejezhető ki törtjeink egész együtthatós lineáris kombinációjaként, hiszen egy ilyen lineáris kombinációt közös nevezőre hozva a nevezőben nem szerepel a p (márpedig a racionális számok redukált tört alakja egyértelmű a számelmélet alaptétele miatt). A második állításnál erősebb is igaz: minden generátorrendszerből bármelyik elem elhagyható úgy, hogy generátorrendszer maradjon. Ez nyilván következik a következő állításból: A racionális számok egy X részhalmaza akkor és csak akkor generátorrendszer, ha minden q prímhatványhoz van olyan (egyszerűsített alakban felírt) tört X-ben, melynek nevezője osztható q-val. Valóban, azt, hogy minden generátorrendszer ilyen kell legyen, a fenti gondolatmenet mutatja (kis módosítással). A megfordításhoz először gondoljuk meg, hogy ha $(a, b) = 1$ és $(c, d) = 1$, akkor az a/b és c/d által generált részcsoportot $(a, c)/[b, d]$ generálja (az $1/[b, d]$ által generált ciklikus csoportban érdemes számolni). Ezzel a trükkel pedig 1 számlálójú, és akármivel osztható nevezőjű törteket gyárthatunk.

IX/10. Ha H és K részcsoportok G-ben, akkor $a(H \cap K) = aH \cap aK$. Vagyis a $H \cap K$ szerinti (bal) mellékosztályok a H illetve K szerinti mellékosztályok metszetei. Tehát $|G : (H \cap K)| \leq |G : H| \cdot |G : K|$.

IX/11. A hatvány rendjének képlete szerint $|g^n| = |g|/(n, |g|)$. Ha G véges, és $e \neq g \in G$, akkor $|g|$ véges (hiszen $|G|$-nek osztója), de nem 1, így van egy p prímosztója. Ha $n = |g|/p$, akkor a képlet szerint $|g^n| = p$.

IX/12. Tudjuk, hogy $b^\ell = e$ akkor és csak akkor, ha $|b|$ osztója ℓ-nek. Legyen $|g| = n$, $|h| = m$, $|gh| = k$. Ekkor $(gh)^{nm} = (g^n)^m (h^m)^n = e^m e^n = e$, vagyis $k = |gh|$ osztója nm-nek. A $(gh)^k = e$ összefüggést n-edik hatványra emelve $e = (gh)^{kn} = (g^n)^k h^{kn} = e^k h^{kn} = h^{kn}$ adódik, vagyis $m = |h|$ osztója kn-nek. De $(m, n) = 1$, így $m \mid k$. Szerepcserével kapjuk, hogy $n \mid k$. Mivel $(n, m) = 1$, ezért $nm \mid k$. A feltételek egyike sem hagyható el. Ha (n, m) nem feltétlenül 1, akkor legyen $h = g^{-1}$, ekkor rendjük egyenlő, de a szorzat rendje 1. Ha pedig $g = (12)$ és $h = (123)$, akkor $gh \neq hg$, a szorzat rendje pedig 2 és nem 6.

IX/13. Ha van másodrendű elem, akkor $|G|$ páros Lagrange tétele miatt. Megfordítva, párosítsunk minden elemet az inverzével. Az egységelem párja önmaga. Ha $|G|$ páros, akkor kell lennie még egy g elemnek, aminek a párja önmaga. Ekkor $g = g^{-1}$, azaz $g^2 = e$. De $g \neq e$, és ezért $|g| = 2$.

IX/14. Legyen $K = g^{-1}Hg$. Ekkor $KK = g^{-1}Hgg^{-1}Hg = g^{-1}HHg = g^{-1}Hg = K$, és $K^{-1} = (g^{-1}Hg)^{-1} = g^{-1}H^{-1}(g^{-1})^{-1} = g^{-1}Hg = K$, hiszen invertáláskor a sorrend megfordul, $(g^{-1})^{-1} = g$ és $H^{-1} = H$. A $h \mapsto g^{-1}hg$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű H és K között, hiszen van inverze, a $k \mapsto gkg^{-1}$ leképezés. Ezért $|H| = |K|$. Végül nyilván $Hg = gg^{-1}Hg = gK$, tehát az utolsó állítás igaz.

IX/15. Legyen $X = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer a G csoportban, feltehetjük, hogy X-be belevettük minden elemének az inverzét is. Legyen továbbá $|G : H| = n$, és válasszunk minden H szerinti bal mellékosztályból egy reprezentánselemet úgy, hogy H-ból az egységelemet választjuk, ezek halmaza legyen R. Ha $g \in X$ és $r \in R$, akkor gr is benne van valamelyik mellékosztályban, és így $r'h$ alakban írható alkalmas $r' \in R$ és $h \in H$ elemekre. Legyen Y az így kapott kn darab $h \in H$ elem halmaza, belátjuk, hogy Y generálja H-t. Valóban, legyen $x \in H$. Ekkor $x = x_1 \ldots x_N$, ahol $x_1, \ldots, x_N \in X$. Mivel $x_N \in X$ és $e \in R$ reprezentáns, $x_N e = r'h'$ alkalmas $r' \in R$ és $h' \in Y$ elemekre. De $x_{N-1} \in X$, ezért $x_{N-1}r' = r''h''$ alkalmas $r'' \in R$ és $h'' \in Y$ elemekre. Ezután $x_{N-2}r''$-t írjuk fel $r'''h'''$ alakban, és így tovább. Végeredményben azt kapjuk, hogy $x = rh$, ahol $r \in R$, és a h elem Y-beli elemek szorzata. Mivel $x, h \in H$, ezért $r \in H$, azaz $r = e$.

IX/16. a) Orbitok: origó középpontú körök. Stabilizátorok: egyeleműek, kivéve, hogy az origó stabilizátora G. b) Orbitok: az x-tengellyel párhuzamos egyenesek. Stabilizátorok: egyeleműek. c) Tranzitív. Stabilizátorok: kételeműek (identitás, és a megfelelő csúcson átmenő tengelyre való tükrözés). d) Orbitok: az adott csúcson átmenő tengelyre szimmetrikus pontpárok, illetve a tengelyen levő csúcsok önmagukban. Stabilizátorok: egyelemű orbitokhoz az egész (kételemű) csoport, kételemű orbithoz egyelemű stabilizátor tartozik. e) Két egyelemű és két háromelemű orbit van, a stabilizátorok D_3 illetve $\mathbb{Z}_2$. f) Tranzitív, az x pont stabilizátora az x-et nem tartalmazó két hármasciklus és az identitás. g) Tranzitív, a stabilizátorok egyeleműek. h) Az x stabilizátora az x-szel felcserélhető elemek halmaza.

IX/17. a) Négy szimmetria van: az identitás (rendje 1), az oldalfelező merőlegesekre való tükrözések (rendjük 2), és a középpontos tükrözés (rendje 2). Több szimmetria nincs, mert egy oldal sem átlóba, sem a másik hosszúságú oldalba nem mehet át. b) Két szimmetria: egy átlóra tükrözés és az identitás. c) Négy szimmetria: az átlóra tükrözések, a középpontos tükrözés és az identitás. d) Nyolc szimmetria (lásd IX/16/c).

IX/18. a) 8, a csoport tranzitív, mert a síkra tükrözésekkel egy csúcs minden csúcsba elvihető, és a stabilizátorok triviálisak. b) 16, ismét tranzitív, egy csúcs stabilizátora pedig kételemű (a vele egy négyzetlapon lévő két szomszédja helyet cserélhet az átlósíkra való tükrözésnél). c) 12, tranzitív, és kételeműek a stabilizátorok.

IX/19. 2: egy él. 4: egy négy hosszú kör egy átlóval. 3: egy 9 hosszú kör csúcsaira alkalmasan 1 és 2 hosszú utakat akasztunk. 1: egy háromszög csúcsaira alkalmasan 1 és 2 hosszú utakat akasztunk.

IX/20. A G csoport alaphalmazán berajzolunk minden $g \in G$ elemhez $|G|$ darab g „színű" nyilat: tetszőleges x-ből g színű nyíl megy xg-be. Ennek a gráfnak a szimmetriái épp a G elemeivel való balszorzások (a Cayley-tételbeli G-vel izomorf csoport). A színeket és az irányítást úgy szüntetjük meg, hogy egy nyíl helyére berakjuk a következő gráfot: egy 3 hosszú út második csúcsáról lelógatunk egy élt, a harmadik csúcsáról pedig a nyíl színétől függő hosszúságú utat.

IX/21. $f(y) = y \iff fg(x) = g(x) \iff g^{-1}fg(x) = x \iff g^{-1}fg \in H \iff fg \in gH \iff f \in gHg^{-1}$.

IX/22. Nyilván $a * (a' * gB) = aa'gB = (aa') * gB$ és $e * gB = egB = gB$, azaz hatást kaptunk. Persze B orbitja az AB-beli mellékosztályok halmaza, ennek hossza $|AB|/|B|$. A B stabilizátora azokból az $a \in A$ elemekből áll, melyekre $aB = B$, azaz $a \in B$, tehát a stabilizátor $A \cap B$. Így $|AB|/|B| = |A|/|A \cap B|$.

IX/23. Elég belátni, hogy a stabilizátorok triviálisak. Ha $g(x) = x$ és y tetszőleges, akkor a tranzitivitás miatt van olyan $h \in A$, melyre $h(x) = y$. Ekkor $g(y) = gh(x) = hg(x) = h(x) = y$. Tehát g az identitás.

IX/24. Legyen M az 1 stabilizátora, és $g \in S_n - M$, feltehető, hogy $g(1) = 2$. Be kell látni, hogy $\langle M, g\rangle = S_n$. Legyen $h \in S_n$. Ha $h(1) = 1$, akkor $h \in M \subseteq \langle M, g\rangle$. Ha $h(1) = 2$, akkor $m = g^{-1}h \in M$, és így $h = gm \in \langle M, g\rangle$. Végül ha $h(1) = i \geq 3$, akkor $m = g^{-1}(2i)h \in M$, és $(2i) \in M$, tehát $h = (2i)gm \in \langle M, g\rangle$.

IX/25. Számoljuk meg kétféleképpen azokat a (g, x) párokat, melyekre $g * x = x$. Az g-k szerint számolva ez a fixpontok összege, az x-ek szerint pedig a stabilizátorok elemszámainak összege, azaz $|G|$-szer az orbitok hosszainak reciprokösszege, de minden reciprok annyiszor számolva, ahány eleme az orbitnak van.

IX/26. Rajzoljunk egy gráfot az $\{1, 2, \ldots, p\}$ halmazon: b és c akkor legyen összekötve, ha $(bc) \in G$. A IX/3/e bizonyításához hasonlóan elég belátni, hogy ez összefüggő. Elég megmutatni, hogy minden komponense egyforma elemszámú, mert az alaphalmaz elemszáma prím. Ha $g \in G$, akkor $g(bc)g^{-1} = (g(b), g(c))$, azaz G elemei éltartók. Ezért komponens képe komponens. Mivel G tranzitív, minden komponens leképezhető mindegyik másikra. *Második megoldás:* Mivel van p hosszú orbit, $|G|$ osztható p-vel. Cauchy később bizonyítandó tétele miatt tehát van G-ben p rendű elem. Ez csak p-es ciklus lehet. Alkalmas hatványát véve a G-ben levő transzpozíció elemei a ciklusban szomszédosak lesznek, tehát IX/3/e miatt készen vagyunk.

X/1. Az izomorfia-osztályok: $\{\mathbb{Z}_2^+, \mathbb{Z}_3^\times, \mathbb{Z}_6^\times, S_2\}$, $\{\mathbb{Z}_3^+, A_3\}$, $\{\mathbb{Z}_4^+, \mathbb{Z}_5^\times\}$, $\{\mathbb{Z}_8^\times, \mathbb{Z}_{12}^\times\}$, $\{S_3, D_3, GL(2,2)\}$, $\{D_4\}$, $\{Q\}$, $\{\mathbb{Z}_8^+\}$. *Indoklás:* Izomorf csoportok rendje egyenlő. Megfordítva, egyenlő rendű **ciklikus** csoportok izomorfak. Mivel prímrendű csoportok ciklikusak, elintéztük a 2 és 3 rendű csoportokat. Tudjuk, hogy negyedrendű csoport kétféle van, ezeket az különbözteti meg, hogy van-e bennük negyedrendű elem. A három hatodrendű csoport azért izomorf, mert mindegyik elemeit egy-egy háromelemű halmaz összes permutációi határozzák meg. Ez a háromelemű halmaz az S_3 esetén az $\{1, 2, 3\}$, a D_3 esetén egy szabályos háromszög három csúcsa, a $GL(2, 2)$ esetén pedig a $\mathbb{Z}_2$ feletti kétdimenziós vektortér összesen három, nem nulla vektora. Az utolsó három, nyolcadrendű csoport közül semelyik kettő sem izomorf: egyetlen kommutatív van, a másik kettőben pedig nem ugyanaz a negyedrendű elemek száma.

X/2. Van. A kocka hat-hat alkalmas lapátlóját behúzva egy-egy szabályos tetraédert kapunk. A kocka bármelyik szimmetriája egy ilyen tetraédert vagy önmagába, vagy a másik ilyen tetraéderbe viszi. Rendeljük hozzá a szimmetriához a -1-et, ha cseréli, és a $+1$-et, ha helyben hagyja a tetraédereket. Ez nyilván homomorfizmus a kételemű csoportba, és így magja $48/2 = 24$ elemű a homomorfizmus-tétel miatt. Ez a 24-elemű részcsoport egy tetraéder csúcsait permutálja. Más permutációnak más szimmetria felel meg, hiszen ha egy szimmetria a tetraéder minden csúcsát fixálja, akkor a kockán is az identitás. Mivel $4! = 24$, a tetraéder négy csúcsának összes permutációját megkapjuk. Ez a részcsoport tehát S_4-gyel izomorf.

X/3. $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $\{id, (123)(456), (132)(465), (14)(26)(35), (15)(24)(36), (16)(25)(34)\}$.

X/4. A prímhatványrendű ciklikusaknak. Ha G-nek csak egyetlen M maximális részcsoportja van, akkor legyen $g \in G - M$. Ekkor a $\langle g\rangle$ részcsoport csak G lehet, mert különben benne lenne egy maximális részcsoportban, ami nem lehet M. Tehát G ciklikus. Tudjuk, hogy egy G ciklikus csoport részcsoportjai a $|G|$ pozitív osztóinak felelnek meg kölcsönösen egyértelműen, és ennél tartalmazásnak oszthatóság felel meg. De csak a prímhatványoknak van egyetlen maximális osztója.

X/5. a) Nem. b) Igen, kép: nem nulla valós számok, mag: egységkör. c) Igen, kép: pozitív valósak, mag: csak a nulla. d) Igen, kép: egységkör, mag: $2\pi k$, ahol k egész. e) Igen, kép: az egész $T^{\times}$, mag: 1 determinánsú mátrixok. f) Igen, kép: az egész $\mathbb{Z}^{\times}$, azaz $\{1,-1\}$, mag: A_n. g) Igen, kép: az egész $\mathbb{Z}_n^+$, mag: az n-nel osztható számok. h) Igen, kép: $\{0,20,40,60,80\}$, mag: $\{0,5,10,15,\ldots,90,95\}$. i) Igen, kép: az egész $\mathbb{Z}_2^+$, mag: forgatások. j) Igen, kép: az összes komplex szám, mag: az x^2+1 polinom többszörösei.

X/6. a) A tételt a X/5/b-beli homomorfizmusra kell alkalmazni. A faktorcsoport elemei az origó körüli körök. b) $\varphi(x)=\cos(2\pi x)+i\sin(2\pi x)$. c) A X/5/f-beli homomorfizmus. d) A X/5/g-beli homomorfizmus.

X/7. Az első faktorcsoport elemei $E=\{e,f^2\}$, $A=\{f,f^3\}$, $B=\{t,tf^2\}$, $C=\{tf,tf^3\}$. Az E az egységelem, rendje 1. Az A^2 szorzatot úgy számítjuk ki, hogy veszünk A-ból egy reprezentánselemet, ez legyen f, négyzetre emeljük, és megnézzük, melyik osztályban van. Látjuk, hogy $f^2\in E$, és ezért $A^2=E$. Ezért az A elem rendje kettő, hiszen négyzete az egységelem, de ő nem az egységelem. Hasonlóan adódik, hogy B és C is másodrendű. A szorzástáblát felírva a Klein-csoportot kapjuk.

A második faktorcsoport elemei: $E=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(32)\}$, $F=\{(123),(134),(243),(142)\}$, $F^2=\{(132),(143),(234),(124)\}$, $T=\{(12),(34),(1324),(1423)\}$, $TF=\{(23),(14),(1342),(1243)\}$, $TF^2=\{(13),(24),(1234),(1432)\}$. A csoport $D_3\cong S_3$-mal izomorf, az izomorfizmusnál $F\leftrightarrow f$ és $T\leftrightarrow t$. Annak belátásához, hogy ez izomorfizmus, vegyük észre, hogy az osztályok legelső elemei pontosan a 4-et fixen hagyó permutációk, azaz az $\{1,2,3\}$ összes permutációi, és így S_3-mal izomorf részcsoportot alkotnak. Ezeket választva reprezentánsoknak világos, hogy a faktorcsoportban ugyanúgy kell számolni, mint S_3-ban.

X/8. a) Ez négyelemű csoport, tehát vagy ciklikus, vagy Klein. Mivel minden elem négyzete benne van a normálosztóban, ami szerint faktorizálunk, a Klein-csoportot kapjuk. b) $\mathbb{Z}_3^+$, hiszen háromelemű. c) $\mathbb{Z}_2^+$, hiszen kételemű. d) Mivel minden elem négyzete 1 vagy 9, a Klein-csoportot kapjuk.

X/9. Legyen $\phi(g)=gN$ a természetes homomorfizmus. Ez G minden X részhalmazához is hozzárendeli a $\phi(X)=\{\phi(x)\mid x\in X\}\subseteq G/N$ halmazt. Megfordítva, ha $Y\subseteq G/N$, akkor legyen $\psi(Y)$ az Y teljes inverz képe a ϕ-nél, azaz az y mellékosztályok uniója, ahol $y\in Y$. A ϕ és ψ leképezések egymás inverzei lesznek a G/N összes részhalmaza, illetve a G azon részhalmazai között, amik N szerinti mellékosztályok uniói. Ez a bijekció tartja a komplexusszorzást, ezért az egymásnak megfelelő halmazok nemcsak egyszerre lesznek részcsoportok, hanem a részcsoportok szerinti mellékosztályok is egymásnak felelnek meg. Így a normálosztók is egymásnak felelnek meg, és az egymásnak megfelelő részcsoportok indexe is ugyanaz lesz.

X/10. D_4: Az egységelem centralizátora az egész csoport, így konjugált osztálya egyelemű. Ugyanez mondható el f^2-ről is, mert $tf^2=f^2t$. Ugyanezért a t centralizátora tartalmazza az e, t, f^2, tf^2 elemeket. Tehát elemszáma 4 vagy 8. De 8 nem lehet, hiszen $tf\neq ft=tf^3$. Tehát t-nek két konjugáltja van, önmaga, és $ftf^{-1}=ftf^3=tf^2$. Hasonló érvelés mutatja, hogy tf-nek is két konjugáltja van: önmaga, és tf^3. Végül f centralizátora $\langle f\rangle$, hiszen f hatványai biztosan centralizálják f-et, de t nem. Ezért f konjugáltjai a kimaradó két elem, f és f^3. Tehát D_4 konjugált osztályai $\{e\}$, $\{f^2\}$, $\{f,f^3\}$, $\{t,tf^2\}$, $\{tf,tf^3\}$. A centrum az egyelemű osztályok egyesítése, tehát $\{e,f^2\}$. A normálosztók azok a részcsoportok, amik konjugált osztályok egyesítései, elemszámuk pedig 8-nak osztója. Kételemű normálosztó tehát csak $\{e,f^2\}$ lehet, és a négyelemű normálosztókban is benne kell, hogy legyen e-n kívül f^2 is (mert a többi konjugált osztálynak páros sok eleme van). Könnyű látni, hogy az így kapott összes lehetőség, $\{e,f^2,f,f^3\}$, $\{e,f^2,t,tf^2\}$, $\{e,f^2,tf,tf^3\}$ normálosztót ad. A két triviálissal együtt tehát hat normálosztó van.

Q konjugált osztályai $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{i,-i\}$, $\{j,-j\}$, $\{k,-k\}$, a centrum $\{1,-1\}$. Minden részcsoport normálosztó, ezek $\langle i\rangle$, $\langle j\rangle$, $\langle k\rangle$, $\langle -1\rangle$, és a két triviális. Az S_n konjugált osztályait a X/19 feladatból kapjuk, az S_n centruma triviális, ha $n\geq 3$. Az S_4-nek négy normálosztója van, A_4-nek három, S_5 egyetlen nemtriviális normálosztója A_5. Az A_n konjugált osztályait az S_n konjugált osztályaiból úgy kapjuk, hogy néhányat ketté kell bontanunk. Ugyanis elképzelhető, hogy két elemet az S_n-ben egymásba lehet konjugálni, de az A_n-ben ezek az átkonjugáló elemek nincsenek benne. Az A_5-ben az ötösciklusok két tizenkételemű osztályt, a hármasciklusok egy húszelemű osztályt, az $(ab)(cd)$ alakú permutációk egy tizenöt elemű osztályt alkotnak. Az A_5 osztályegyenlete tehát: $1+12+12+20+15+15=60$. Ezekből a számokból nem lehet összeadással kikeverni 60 valódi osztóját úgy, hogy 1 is köztük legyen, és így A_5 egyszerű.

X/11. Legyen $N = \{e, a\}$. Az $\{e\}$ mindig konjugált osztálya G-nek, és mivel N a G konjugált osztályainak egyesítése, $\{a\}$ is az. Tehát $a \in Z(G)$.

X/12. Ez a részhalmaz mindig konjugált osztályok egyesítése, hiszen másodrendű elem konjugáltja mindig másodrendű (sőt, általában a konjugálás megőrzi az elemrendet, hiszen ez a csoportnak önmagába képző izomorfizmusa). De ez a részhalmaz nem feltétlenül részcsoport, például D_4-ben sem az.

X/13. Legyen $gZ(G)$ a $G/Z(G)$ generátoreleme. Ekkor a $g^n Z(G)$ halmazok kiadják a G összes elemét. De ezek elemei felcserélhetők, hiszen ha $a, b \in Z(G)$, akkor $(g^n a)(g^m b) = (g^m b)(g^n a)$.

X/14. Legyen I_{ij} $(i > j)$ az a mátrix, amiben az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi nulla. Ekkor $I + I_{ij}$ invertálható. Könnyű számolás mutatja, hogy ha egy mátrix az $I + I_{ij}$ mátrixok mindegyikével felcserélhető, akkor az az egységmátrix skalárszorosa.

X/15. A csoport elemei $I + N$ alakúak, ahol $N^3 = 0$. Mivel $\mathbb{Z}_p$ felett tagonként lehet p-edik hatványra emelni, $(I + N)^p = I$. A centrum azokból a mátrixokból áll, melyekben a jobb felső sarokban tetszőleges elem állhat, a főátlóban 1-esek, másutt nulla.

X/16. a): Ha lenne tizedrendű elem, akkor G ciklikus lenne, és így kommutatív. b): Ha $|f|$ öt, $|t|$ kettő, és $ft = tf$, akkor $|tf|$ tíz lenne (hiszen $(tf)^2 = f^2 \neq e$ és $(tf)^5 = t \neq e$). c): Tanultuk, hogy ha minden elem négyzete e, akkor G kommutatív. d): Párosítsunk minden elemet az inverzével. Az egységelem párja önmaga, és mivel 10 páros, van olyan $g \neq e$, melyre $g = g^{-1}$, azaz g másodrendű. f): Mivel az elem hatványai benne vannak, legalább ötelemű. Ennél nagyobb nem lehet, mert akkor Lagrange tétele miatt tízelemű lenne, ami b)-nek ellentmond. g) Ugyanaz, mint f). h) és i): Ha t másodrendű, akkor g) miatt öt konjugáltja van. Ha f ötödrendű, akkor a négy egységtől különböző hatványa is ötödrendű. Ezzel mind a 10 elemet kimerítettük. j): A tf elem nem hatványa f-nek, és így másodrendű. Másik gondolatmenet: Mivel tft^{-1} ötödrendű, az eddigiek miatt f-nek hatványa. De ha $tft^{-1} = f^i$, akkor $tf^i t^{-1} = t^2 f t^{-2} = f$, másrészt $tf^i t^{-1} = (tft^{-1})^i = f^{i^2}$. Ezért $i^2 \equiv 1$ (5), azaz $i \equiv 1$ vagy -1 modulo 5. De 1 nem lehet, mert akkor t és f felcserélhető lenne. k): Az f^i és az $f^i t$ elemek páronként különbözők, ha $0 \leq i \leq 4$, és így kiadják G mind a tíz elemét. Mivel D_5 szorzását az $f^5 = 1$, $t^2 = 1$, $tft^{-1} = f^{-1}$ szabályok egyértelműen meghatározzák, D_5-ben és G-ben ugyanúgy kell számolni, és így izomorfak. Ez a bizonyítás nyilván megy minden páratlan prímre.

X/17. Az N a G konjugált osztályainak egyesítése, amelyek elemszáma vagy 1, vagy p-vel osztható. Benne van az egységelem, ez egyelemű osztály. Mivel p osztja N rendjét, kell lennie még N-ben egyelemű osztálynak.

X/18. A $|P|$ szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen $|P : M| = p$. Ha $Z(P) \subseteq M$, akkor $M/Z(P)$ egy p indexű részcsoport $P/Z(P)$-ben, és $|Z(P)| > 1$ miatt ez P-nél kisebb rendű csoport, tehát az indukciós feltevés miatt kész vagyunk (vö. X/9). Ha viszont van $g \in Z(P) - M$, akkor $g^i M = M g^i$ minden i-re, másrészt $g^i M$ már kiadja az M szerinti mellékosztályokat, ha $1 \leq i \leq p$, mert ha $g^i \in M$ lenne egy $i < p$-re, akkor $(i, |g|) = 1$ miatt g hatványa lenne g^i-nek, ami lehetetlen, mert $g \notin M$.

X/19. Mivel a konjugálás szorzattartó, az állítást elég egy ciklusra megmutatni. Közvetlen számolással adódik, hogy $g(12\dots k)g^{-1} = (g(1)g(2)\dots g(k))$. Tehát az $(12\dots n)$ ciklusnak $(n-1)!$ konjugáltja van, azaz centralizátora n-elemű, és így az $(12\dots n)$ hatványaiból áll.

X/20. Legyen S az 1 stabilizátora A_n-ben. Tegyük fel, hogy $N \triangleleft A_n$ és $e \neq h \in N$, mondjuk $h(1) = 2$. Minden $i \in \{2, \dots, n\}$-hez van olyan $g_i \in A_n$, hogy $g_i(1) = 1$, és $g_i(2) = i$. Az N-beli $h_i = g_i h g_i^{-1}$ az 1-et i-be viszi. Tehát N tranzitív. Megmutatjuk, hogy $|N \cap S| > 1$. Tegyük fel, hogy nem, ekkor $k \in N$ esetén $k^{-1} h_{k(1)} \in S \cap N$, vagyis $N = \{e, h_2, \dots, h_n\}$. Ha tehát $g \in S$, akkor $g h_i g^{-1} = h_{g(i)}$, hiszen a baloldal az 1-et $g(i)$-be viszi. Az indexek átpermutálásával feltehető, hogy h_2 és h_3 nem egymás inverzei, és így $j = h_2 h_3(1) \notin \{1, 2, 3\}$. Mivel $n \geq 6$, van olyan $g \in A_n$, ami fixálja az 1, 2, 3 elemeket, de j-t nem. Ekkor $g h_2 h_3 g^{-1} = g h_2 g^{-1} g h_3 g^{-1} = h_2 h_3$, és 1-et helyettesítve a $g(j) = j$ ellentmondást kapjuk. Tehát $|S \cap N| > 1$. Nyilván $S \cong A_{n-1}$, ami egyszerű az indukciós feltevés miatt. Mivel $S \cap N \triangleleft S$ ezért $S \subseteq N$. Ekkor $h_i S \subseteq N$, de ezek az összes S szerinti mellékosztályt kiadják, és így $N = A_n$.

X/21. Ha $n \geq 8$, akkor a Cayley-tétel miatt van, különben nincs. A kvaterniócsoportban ugyanis minden 1-től különböző elemnek hatványa a -1. Ha tehát valamilyen x nem fixpontja a -1-hez tartozó permutációnak, akkor nem fixpontja a többi hat nem identikus permutációnak sem. Ezért az x orbitja nyolcelemű.