Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Kilencedik alkalom

1. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az S_3 csoport összes részcsoportját, valamint az A_4 alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját. Írjuk fel S_3-ban az $\{id, (12)\}$ részcsoporthoz tartozó összes bal- és jobboldali mellékosztályt.*

2. *Legyen $n\mathbb{Z}^+$ az n-nel osztható egész számok csoportja az összeadásra. Határozzuk meg $|\mathbb{Z}^+ : n\mathbb{Z}^+|$ értékét.*

3. *Határozzuk meg a G csoportban az X által generált részcsoportot:*

a) $G = \mathbb{Z}^+$, $X = \{28, 34\}$.

b) $G = S_4$, $X = \{(123), (12)(34)\}$.

c) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \{2, 3\}$.

d) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, X *a 2 determinánsú mátrixok halmaza.*

e) $G = S_n$, $X = \{(12), (12\ldots n)\}$.

4. *Legyen f a D_n diédercsoportban egy $2\pi/n$ szögű forgatás, t pedig tetszőleges tengelyes tükrözés. Mutassuk meg, hogy D_n minden eleme egyértelműen felírható f^i vagy tf^i alakban, ahol $0 \leq i < n$. Igazoljuk azt is, hogy $f^i t = tf^{-i}$ minden i egészre.*

5. *Határozzuk meg a D_5 és D_6 diédercsoportokban a $\langle t, f^2 \rangle$ részcsoportot.*

6. *Mutassuk meg, hogy ha A és B részcsoportok egy G csoportban, akkor AB akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$.*

7. *Igazoljuk, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G Abel. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?*

8. *Ciklikus-e a három-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportja?*

9. *Bizonyítsuk be, hogy a racionális számok additív csoportja nem végesen generált, sőt, minimális generátorrendszere sincs.*

10. *Mutassuk meg, hogy két véges indexű részcsoport metszete is véges indexű. Mennyi lehet a metszet indexe legfeljebb?*

11. *Igazoljuk, hogy minden nem egyelemű véges csoportban van prímrendű elem.*

12. *Mutassuk meg, hogy ha $|g|$ és $|h|$ relatív prímek, és $gh = hg$, akkor $|gh| = |g||h|$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?*

13. *Igazoljuk, hogy $|G|$ pontosan akkor páros, ha G-ben van másodrendű elem.*

14. *Legyen G csoport, H részcsoportja G-nek és $g \in G$. Mutassuk meg, hogy a $g^{-1}Hg$ komplexusszorzat is részcsoport, melynek rendje ugyanaz, mint H rendje. Igaz-e, hogy a Hg jobboldali mellékosztály G egy alkalmas részcsoportja szerinti baloldali mellékosztály is egyben?*

15*. *Bizonyítsuk be, hogy végesen generált csoportnak minden véges indexű részcsoportja végesen generált.*

FORDÍTS!

16. *Határozzuk meg az alábbi $G \leq S_X$ permutációcsoportokban az orbitokat és a stabilizátorokat.*

a) X a sík pontjai, G az origó körüli forgatások csoportja.
b) X a sík pontjai, G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja.
c) X egy szabályos n-szög csúcsai, G ezt az n-szöget önmagába vivő egybevágóságok csoportja.
d) X egy szabályos n-szög csúcsai, G ezt az n-szöget önmagába vivő egybevágóságok csoportjának egy adott csúcsot fixáló elemei.
e) X egy kocka csúcsai, G a kocka szimmetriacsoportjában az egyik csúcs stabilizátora.
f) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = A_4$.
g) X az S_3 csoport alaphalmaza, $g \in S_3$ esetén legyen $f_g(x) = gx$, a G csoport az f_g permutációkból áll.
h) X az S_3 csoport alaphalmaza, $g \in S_3$ esetén legyen $f_g(x) = gxg^{-1}$, a G csoport az f_g permutációkból áll (itt csak a stabilizátorok kellenek).

17. *Az alábbi csoportoknak határozzuk meg a rendjét és az elemeiknek a rendjeit.*

a) Egy olyan téglalap szimmetriacsoportja, amely nem négyzet.
b) Egy olyan deltoid szimmetriacsoportja, amely nem rombusz.
c) Egy olyan rombusz szimmetriacsoportja, amely nem négyzet.
d) Egy négyzet szimmetriacsoportja.

18. *Határozzuk meg az alábbi alakzatok szimmetriáinak számát.*

a) Egy olyan téglatest, aminek mindhárom élhosszúsága különböző.
b) Egy olyan négyzet alapú egyenes hasáb, ami nem kocka.
c) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb.

19. *Rajzoljunk olyan gráfokat, melyeknek rendre pontosan 2, 4, illetve 3 szimmetriája van. Rajzoljunk olyanokat is, amiknek csak 1 van (az identitás).*

20*. *Mutassuk meg, hogy minden véges csoport előáll egy alkalmas véges, irányítatlan (többszörös és hurokél nélküli) gráf szimmetriacsoportjaként.*

21. *Legyen $G \leq S_X$ és $x, y \in X$. Mutassuk meg, hogy ha $g(x) = y$, és x stabilizátora H, akkor y stabilizátora gHg^{-1}.*

22. *Legyenek A és B részcsoportok a G csoportban. Legyen X a B szerinti baloldali mellékosztályok halmaza, és hasson ezen A balszorzással, azaz legyen $a * (gB) = agB$. Mutassuk meg, hogy hatást kaptunk, határozzuk meg a B orbitját és stabilizátorát, majd igazoljuk, hogy $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$.*

23. *Igazoljuk, hogy ha $A \leq S_n$ Abel-féle és tranzitív, akkor $|A| = n$.*

24. *Mutassuk meg, hogy S_n-ben minden pont stabilizátora maximális részcsoport.*

25. *Hasson a G véges csoport az X véges halmazon. Bizonyítsuk be, hogy a G orbitjainak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.*

26*. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, és G tranzitív részcsoportja S_p-nek, mely tartalmaz transzpozíciót, akkor $G = S_p$.*