Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Hetedik alkalom

Legyen a B szimmetrikus bilineáris függvény mátrixa M. Végezzük el rajta a következő, módosított Gauss-eliminációt. Az elemi lépés most az, hogy az egyik sorból kivonjuk egy másik skalárszorosát, és *ezután azonnal* az ugyanannyiadik oszlopból is kivonjuk a megfelelő oszlop ugyanannyiszorosát. Hasonlóképpen kicserélhetünk két sort, és *utána azonnal* a megfelelő két oszlopot. Az M mátrixot a főátlóban lefelé haladva diagonalizáljuk ezekkel a lépésekkel, ezért elég azt megmutatni, hogy az első sor és oszlop nem átlóbeli elemei kinullázhatók. Ez nyilvánvaló akkor, ha a bal felső sarokban nem nulla áll. Ha ott nulla áll, de a főátló nem végig nulla, akkor a bal felső sarokba cserélünk egy nem nulla elemet. Végül ha a főátló végig nulla, akkor az első oszlop egy nem nulla elemének sorát adjuk hozzá az első sorhoz (és a megfelelő oszlopot is az első oszlophoz).

1. *Tekintsük a $-x^2+10xy-y^2-z^2$ és a $-3x\overline{x}+4ix\overline{y}-4i\overline{x}y+3y\overline{y}-z\overline{z}$ kvadratikus alakot $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett. Írjuk fel ezek mátrixát, transzformáljuk őket négyzetösszeggé a fenti módszerrel is és a Gram-Schmidt eljárással is, végül határozzuk meg karakterüket.*

2. *Mely testek fölött diagonalizálható az $x_1y_2+x_2y_1$ szimmetrikus bilineáris függvény? A valós test esetében adjuk meg az összes ortogonális bázist.*

3. *Legyen Q kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren, $e_1,\dots,e_n$ egy Q-ortogonális bázis, és $U=\langle e_i \mid Q(e_i)>0\rangle$, $V=\langle e_i \mid Q(e_i)\geq 0\rangle$, $W=\langle e_i \mid Q(e_i)=0\rangle$. E három altér közül melyek függetlenek az $e_1,\dots,e_n$ bázistól?*

4. *Ellentmond $x^2+y^2+(x+y)^2=(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{3}y)^2-(x-y)^2$ a tehetetlenségi tételnek?*

5. *Igazoljuk, hogy a fenti eljárás 2-től különböző karakterisztikájú test esetében diagonális mátrixhoz vezet. Hogyan módosul a bázis az elemi lépések során?*

6. *Mutassuk meg, hogy a valós test felett a fenti eliminációs eljárásban a bal felső sarokban álló aldeterminánsok (az úgynevezett főminorok) előjele nem változik meg. Igazoljuk, hogy $B(u,u)$ akkor és csak akkor pozitív definit, ha valamennyi főminor pozitív, és akkor és csak akkor negatív definit, ha a növekvő főminorok előjeleinek sorozata $-,+,-,+,-,\dots$.*

7. *Mely bilineáris függvények mátrixa nem függ a bázistól?*

8. *Egy bilineáris függvény antiszimmetrikus, ha $B(u,v)=-B(v,u)$ minden u, v-re. Igazoljuk 2-től különböző karakterisztikájú test esetén, hogy B akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak nulla, továbbá hogy a bilineáris függvények tere a szimmetrikus és az antiszimmetrikus bilineáris függvények altereinek direkt összege.*

9. *Igazoljuk, hogy minden komplex bilineáris függvény egyértelműen írható $A+Bi$ alakban, ahol A és B Hermitikus.*

10. *Legyen B pozitív definit bilineáris függvény. Igaz-e, hogy tetszőleges $v_1,\dots,v_n$ vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a $|((B(v_i,v_j))|$ determináns nullától különböző?*

11*. *Mely valós szimmetrikus bilineáris függvényekre eleme minden nem nulla vektor egy ortogonális bázisnak?*

12*. *Mely B komplex bilineáris függvényekre igaz, hogy $B(u,v)=0 \iff B(v,u)=0$?*