Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Hatodik alkalom

1. *Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van, ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő, különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

2. *Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?*

3. *Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ is B-invariáns altér.*

4. *Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $v \in V$. Igazoljuk az alábbi állításokat.*

a) *$W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a v-t tartalmazó legszűkebb A-invariáns altér.*

b) *$\dim(W) = \mathrm{gr}(m_{A,v})$ ($m_{A,v}$ az V/20. feladatban definiált polinom).*

c) *Ha m_A-nak van k-adfokú irreducibilis osztója, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.*

d) *Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).*

5. *Van-e olyan $M \in \mathbb{Q}^{100\times 100}$ mátrix, melynek csak a két triviális invariáns altere van?*

6. *Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha B felcserélhető A-val, akkor van olyan f polinom, hogy $B = f(A)$.*

7. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

8. *Legyen T test, $\lambda \in T$, és M az az $n \times n$-es Jordan-blokk, melynek főátlójában λ, a felette levő, vele párhuzamos „ferde sorban” csupa 1-es, a mátrix többi helyén pedig mindenütt nulla áll. Igazoljuk, hogy ha $f \in T[x]$, akkor az $f(M)$ mátrix elemei a következők: a főátló alatt csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól felfelé számított k-adik „ferde sor” mindegyik eleme $f^{(k)}(\lambda)/k!$, ahol a (k) kitevő k-adik deriváltat jelöl ($0 \le k \le n-1$).*

9. *Bizonyítsuk be, hogy ha M komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén M^n akkor és csak akkor tart nullához, ha M minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.*

10. *Legyen A lineáris transzformáció egy komplex feletti n-dimenziós vektortéren.*

a) *Igazoljuk, hogy ha $k \le n$, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.*

b) *Mik lesznek A hatványainak sajátértékei? Mit mondhatunk ezek multiplicitásairól?*

11. *Legyen V egy véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Igazoljuk, hogy van olyan k egész, melyre $V = \mathrm{Im}(A^k) \oplus \mathrm{Ker}(A^k)$.*

12. *Legyen W altere a V vektortérnek, $\mathbb{A} = \mathrm{Hom}(V)$ mint algebra, és álljon $\mathbb{B}$ az $\mathbb{A}$ azon elemeiből, melyeknek W invariáns altere. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{B}$ részalgebrája $\mathbb{A}$-nak, és határozzuk meg a dimenzióját.*