Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév
Ötödik alkalom

1. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk illetve mátrixok sajátértékeit, saját-altereit, és karakterisztikus polinomját.*

a) *Az alábbi mátrixok* $\mathbb{R}$ *illetve* $\mathbb{C}$ *felett:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix n-edik hatványát.

b) *A vektortér a sík* $\mathbb{R}$ *felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.*

c) *A transzformáció a deriválás az* $\mathbb{R}[x]$ *legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.*

2. *Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.*

3. *Egy város lakásait három kategóriába sorolják állapotuk szerint: elhanyagolt, átlagos, és kitűnő. A jelenlegi finanszírozási lehetőségek mellett az éves statisztikák azt mutatják, hogy az elhanyagolt lakások* 60 *százaléka elhanyagolt marad az év végére is,* 30 *százalékukat felújítják átlagos állapotúra, a maradék* 10 *százalékot pedig kitűnő állapotúra. Az átlagos állapotú lakások* 20 *százaléka leromlik elhanyagoltra,* 70 *százaléka marad átlagos állapotú, a maradék* 10 *százalékot pedig felújítják. Végül a kitűnő állapotú lakások* 80 *százaléka kitűnő állapotban marad, a maradék* 20 *százalék pedig leromlik átlagosra az év végére. Hosszú távon mi lesz a lakások állapotának eloszlása? [Eredmény:* $2:4:3$, *százalékban közelítőleg* $22.2 : 44.4 : 33.3$, *ez már 4-5 év alatt beáll, és nem függ a kiinduló eloszlástól.]*

4. *Az alábbi sorozatok általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.*

a) $a_0 = a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ *(Fibonacci-sorozat).*

b) $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.

5. *Adjunk explicit képletet az a_k és b_k számokra, amelyek rekurzív definíciója a következő:* $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k + b_k$, $b_{k+1} = 2b_k - a_k$ $(k \geq 0)$.

6. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges transzformációnak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, mint (tetszőleges bázisban felírt) mátrixának. Igazoljuk, hogy egy tetszőleges $n \times n$-es M mátrix karakterisztikus polinomja tényleg egy n-edfokú polinom. Milyen kapcsolatban állnak az M karakterisztikus polinomjának együtthatói M nyomával illetve determinánsával? Mutassuk meg, hogy ha M-nek n különböző sajátértéke van, akkor ezek összege az M nyoma, szorzatuk pedig az M determinánsa.*

7. *Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátalterek összege az egész tér?*

FORDÍTS!

8. *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*
a) *Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.*
b) *Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.*
c) *Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.*

9*. *Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?*

10. *Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es M mátrix főátlójában és ezalatt csupa nulla áll. Igazoljuk, hogy $M^n = 0$.*

Cayley-Hamilton tétel: Minden transzformáció gyöke a karakterisztikus polinomjának.

11. *Határozzuk meg az első feladatban szereplő mátrixok és lineáris transzformációk minimálpolinomját. Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.*

12. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, melyeknek másodfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző? Adjunk meg a síkon olyan lineáris transzformációt, melynek minimálpolinomja x^2.*

13. *Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.*

14. *Igazoljuk, hogy ha M invertálható mátrix, akkor M^{-1} polinomja M-nek.*

15. *Tekintsük $\mathrm{Hom}(V)$-ben az $\{A^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ $(A^0 = I)$ transzformációk által generált alteret. Hány dimenziós ez az altér?*

16. *Igazoljuk, hogy egy racionális elemű négyzetes mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett. (Használjunk fel egy korábban a gyakorlaton szerepelt állítást homogén racionális együtthatós egyenletrendszerek komplex megoldásairól).*

17. *Határozzuk meg a komplex számok $\mathbb{R}$ feletti algebrájában a $\sqrt{2}+1$ minimálpolinomját.*

18. *Definiáljunk szorzást az $(x, y)(u, v) = (xu + yv, xv + yu)$ képlettel a sík pontjainak vektorterén. Így egy $\mathbb{R}$ feletti egységelemes algebrát kapunk. Mi lesz ebben a $(3, 2)$ elem minimálpolinomja?*

19. *A Gauss-egészek az $a+bi$ alakú komplex számok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Határozzuk meg ebben a gyűrűben a legszűkebb olyan ideált, ami az $5 + 5i$ és a $7i - 1$ számokat is tartalmazza, majd adjuk meg ennek az ideálnak az összes generátorelemét.*

20. *Legyen A lineáris transzformáció a V vektortéren, és $0 \neq v \in V$.*
a) *Mutassuk meg, hogy azok a p polinomok, melyekre $p(A)v = 0$, ideált alkotnak $T[x]$-ben. Jelölje $m_{A,v}$ ennek a normált generátorelemét.*
b) *Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektorterén.*
c) *Igazoljuk, hogy m_A az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V-t.*

21. *Igaz-e, hogy tetszőleges legfeljebb n-edfokú $m(x)$ polinomhoz van az n-dimenziós vektortérnek egy olyan lineáris transzformációja, amelynek $m(x)$ a minimálpolinomja? Mely polinomok állnak elő egy alkalmas lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjaként?*