Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév
Negyedik alkalom

Vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója, ami tetszőleges maximális független részrendszer elemszáma. Lineáris leképezés rangja a képterének dimenziója. Szorzat rangja legfeljebb akkora, mind bármelyik tényező rangja. Lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának az oszloprangja. Mátrix oszloprangja ugyanaz, mint a sorrangja, és ez a Gauss-eliminációban fellépő vezéregyesek száma. A diád egy oszlopvektor és egy sorvektor szorzata. Egy mátrix rangja a legkisebb olyan szám, ahány diád összegére bontható. Legyenek V és W vektorterek T felett, $B = (b_1, \dots, b_n)$ bázis V-ben, $C = (c_1, \dots, c_n)$ bázis W-ben, és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. A $V^* = \mathrm{Hom}(V, T)$ a V duális tere.

- Ha $w \in W$, akkor $\tilde{w} : T \to W$ az a leképezés, melyre $\tilde{w}(\lambda) = \lambda w$ („jobbszorzás" w-vel). A $\tilde{}\ : W \to \mathrm{Hom}(T, W)$ bázistól független izomorfizmus, és $[\tilde{w}]_{C/\{1\}} = [w]_C$.
- Legyen $b_i^* \in V^*$ az a leképezés, melyre $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$. Az a $^* : V \to V^*$ lineáris leképezés, amelynél $b_i \mapsto b_i^*$, a B bázistól függő izomorfizmus, és $[v^*]_{\{1\}/B} = [v]_B^T$.
- Ha $v \in V$, akkor $\hat{v} \in V^{**}$ az a leképezés, melynél tetszőleges $f \in V^*$ esetén $\hat{v}(f) = f(v)$ (a v „behelyettesítése"). A $\hat{}\ : V \to V^{**}$ bázistól független izomorfizmus, és $v^{**} = \hat{v}$, ahol a második * a $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ duális bázisra vonatkozik. Továbbá $[\hat{v}]_{\{1\}/B^*} = [v]_B^T$.
- Ha $w \in W$, akkor a $[w]_C$ oszlopvektor i-edik koordinátája $c_i^* w$. Az $[A]_{C/B}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $c_i^* A b_j$.
- Legyen $A^\circ \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ az a leképezés, melyre $f \in W^*$ esetén $A^\circ(f) = f \circ A$. Ekkor $[A^\circ]_{B^*/C^*} = [A]_{C/B}^T$. Az $A^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$ leképezést úgy definiáljuk, hogy az A° leképezést komponáljuk a W és W^* közötti C bázishoz, illetve a V és V^* közötti B bázishoz tartozó izomorfizmussal: $(A^* w)^* = A^\circ(w^*) = w^* A$. Így $[A^*]_{B/C} = [A]_{C/B}^T$.
- Ha $v \in V$ és $w \in W$, akkor a $\tilde{w} v^* : V \to W$ leképezést diádnak nevezzük. Speciálisan $\tilde{c}_i b_j^*$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ bázis $\mathrm{Hom}(V, W)$-ben (a mátrixukban egy 1-es, a többi 0).

1. *Igazoljuk az alábbiakat mátrixok felhasználása nélkül (a jelölések a fentiek, az egymás mellé írás kompozíciót is és behelyettesítést is jelölhet).*

a) *A* $\tilde{}$ *művelettartó, és* $\widetilde{A(v)} = A\tilde{v}$.
b) B^* *bázis* V^**-ban.*
c) *A* $\hat{}$ *lineáris és injektív.*
d) $\tilde{c}_i b_j^*$ *bázis* $\mathrm{Hom}(V, W)$*-ben.*
e) $\sum_{i=1}^n \tilde{b}_i b_i^* = id_V$.
f) *A* $^\circ : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ *és a* $^* : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W, V)$ *leképezések művelettartóak, és* $A^{**} = A$.
g) *Ha* $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *és* $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$*, akkor* $(AB)^\circ = B^\circ A^\circ$*, és* $(AB)^* = B^* A^*$.
h) *Ha* $w, w_1 \in W$*, akkor* $w^*(w_1) = w_1^*(w)$ *és* $(\tilde{w})^* = w^*$.
i) *Ha* $v \in V$*, és a* v^**-ot* **mint leképezést** *csillagozzuk meg, akkor az eredmény* $\tilde{v}$.
j) *Tetszőleges diádra* $(\tilde{w} v^*)^* = \tilde{v} w^*$*, azaz szintén diád.*

Vezessük le a j) állításból, hogy egy mátrix oszloprangja és sorrangja (azaz a transzponáltjának az oszloprangja) ugyanaz.

FORDÍTS!

2. *Írjuk fel a megfelelő bázispárokban az $A\tilde{b}_j$, és a c_i^*A leképezések mátrixát. Ennek, és az 1/e állításnak a felhasználásával mutassuk meg, hogy ha az $M = NK$ mátrixszorzás igaz, akkor $M = u_1v_1 + \cdots + u_sv_s$, ahol N oszlopai $u_1, \ldots, u_s$, és K sorai $v_1, \ldots, v_s$.*

3. *Igazoljuk, hogy ha $M = u_1v_1 + \cdots + u_sv_s$, és $\{u_1, \ldots, u_s\}$ vagy $\{v_1, \ldots, v_s\}$ összefüggő, akkor ez a diádfelbontás rövidíthető, ha viszont mindkét rendszer független, akkor $\langle u_1, \ldots, u_s\rangle$ egyenlő az M oszlopai által generált altérrel, és így $s = r(M)$.*

4. *Az alábbi M mátrixok esetében határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét, valamint rangját, és bontsuk fel a mátrixokat rangnyi sok diád összegére.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *Határozzuk meg az $\{x^2+2x+2,\ 2x^2-3x+6,\ 3x^2-8x+10\}$ polinomrendszer rangját.*

6. *Bontsuk fel a síkon az origó középpontú forgatásokat és az origón átmenő egyenesekre való tükrözéseket két-két diád összegére.*

7. *Igazoljuk, hogy ha A és B összeadható lineáris leképzések, akkor $r(A+B) \le r(A)+r(B)$. Adjunk példát arra az esetre, amikor egyenlőség áll, és arra is, amikor nem.*

8. *Legyenek $A \in \mathrm{Hom}(V,W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U,V)$. Igazoljuk, hogy*
- *a)* $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ *és* $\mathrm{Ker}(AB) \supseteq \mathrm{Ker}(B)$;
- *b) ha AB injektív (illetve szürjektív), akkor B (illetve A) is az;*
- *c) ha A és B is injektív (szürjektív, bijektív), akkor AB is az;*
- *d)* $r(AB) = r(B) - \dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(B)) \ge r(A) + r(B) - \dim(V)$. *Vezessük le ebből, hogy $\tilde{w}v^*$ csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényező nulla.*

9. *Legyenek V, W ugyanazon test feletti vektorterek, és $v \in V$ egy rögzített vektor. Jelölje $\mathcal{X}$ azt a lineáris leképezést $\mathrm{Hom}(V,W)$-ből W-be, ami az A leképezéshez $A(v)$-t rendeli. Határozzuk meg $\mathcal{X}$ rangját.*

10. *Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 8 rangú, 13×21-es valós mátrixot a kéménybe, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangja 7 lesz, akkor azonnal felfallak." Érdemes-e a királylánynak bejárni a lineáris algebra előadásra?*

A sárkány a királylány hugát is meglátogatta. „Neked egy 8 rangú 8×8-as mátrixot kell most rögtön felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát a most felírt mátrixot már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját 7-té tudom tenni, akkor felfallak." Ez a lány már korábban megtanulta a lineáris algebrát. Életben maradt-e?

11. *Ha egy $n \times n$-es M mátrix rangja r, mi lesz annak a mátrixnak a rangja, amelynek elemei az M megfelelő ($(n-1) \times (n-1)$-es) előjeles aldeterminánsai?*

12*. *Mely r egészekhez van olyan $k \times n$-es valós mátrix, amelynek rangja r, és egyik $r \times r$-es aldeterminánsa sem nulla?*