Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév
Harmadik alkalom

Egy A lineáris transzformáció *nilpotens,* ha van olyan n pozitív egész, hogy $A^n = 0$ (a nulla transzformáció), és A *idempotens,* ha $A^2 = A$.

1. *A II/11. feladat lineáris leképezéseinek határozzuk meg a kép- és magterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel állítását.*

2. *Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, illetve a képtere.*

3. *Mely véges dimenziós vektortereknek van olyan lineáris transzformációja, melynek a képtere és a magtere ugyanaz?*

4. *Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?*

5. *Mutassuk meg, hogy ha A idempotens lineáris transzformáció a V vektortéren, akkor $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = V$. Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.*

6. *Igaz-e, hogy ha V véges dimenziós vektortér, akkor az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ akkor és csak akkor nilpotens, ha nem létezik olyan $W \leq V$ nem nulla altér, hogy $A(W) = W$?*

7. *Igaz-e, hogy ha egy véges dimenziós V vektortér egy A lineáris transzformációja nilpotens, akkor tetszőleges $W \leq V$ nem nulla altérre $\dim A(W) < \dim W$? És a megfordítás?*

8. *Igazoljuk, hogy ha az A és B nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz $AB = BA$), akkor $A + B$ is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?*

9. *Legyen V egy n-dimenziós vektortér és $v, w \in V$. Alteret alkotnak-e $\mathrm{Hom}(V)$-ben az alábbi halmazok? Ha igen, hány dimenziós ez az altér?*
a) $\{A \in \mathrm{Hom}(V) \mid A(v) = w\}$;
b) $\{A \in \mathrm{Hom}(V) \mid A(v) \in \langle w \rangle\}$.

10. *Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Határozzuk meg $\mathrm{Hom}(V)$-ben az izomorfizmusok által generált alteret.*

11. *Igazoljuk, hogy az izomorfia ekvivalencia-reláció (bármilyen struktúrák között).*

12. *Legyen V vektortér a T test felett, és $A : V \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, T), T)$ az a leképezés, amire $[A(v)](f) = f(v)$ minden $f \in \mathrm{Hom}(V, T)$ és $v \in V$ esetén. Igazoljuk, hogy A injektív, és pontosan akkor izomorfizmus, ha V véges dimenziós.*

13. *Adjunk meg olyan A és B lineáris transzformációkat egy végtelen dimenziós V vektortéren, melyekre $AB = I$ (az identitás), de BA nem az.*

14. *Mutassuk meg, hogy egy lineáris leképezés akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű, ha alkalmas bázispárban mátrixa az egységmátrix.*

15*. *Legyen V véges dimenziós vektortér egy végtelen test felett. Mely A lineáris transzformációkhoz található olyan bázis, amelyben az A mátrixa egyetlen nullát sem tartalmaz?*