Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Második alkalom

1. *Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.*

a) *A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett.*

b) *A legfeljebb n-edfokú T feletti polinomok a T test felett.*

c) *A $T^{2\times 3}$ a T test felett.*

d) *A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?*

e) *Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek 2 gyöke.*

f) *Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.*

g) *A $T^{n\times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.*

2. *Egy $\mathbb{Z}_2$ feletti háromdimenziós vektortérben hány direkt kiegészítő altere van egy egydimenziós altérnek?*

3. *Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V-ben. Bizonyítsuk be, hogy* $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

4. *Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.*

5. *Mutassuk meg, hogy $n\geq 2$ esetén minden $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek végtelen sok $n-1$-dimenziós altere van.*

6*. *Mutassuk meg, hogy ha V végtelen dimenziós vektortér, akkor minden r racionális számhoz megadható V-ben egy V_r altér úgy, hogy $r<s\in\mathbb{Q}$ esetén $V_r \subsetneq V_s$.*

7*. *Mutassuk meg, hogy egy végtelen test feletti vektortér nem áll elő véges sok valódi alterének uniójaként.*

8.** *Igazoljuk, hogy ha U, V, W véges dimenziós alterek egy vektortérben, akkor az $(U\cap V)+(U\cap W)+(V\cap W)$ és $(U+V)\cap(U+W)\cap(V+W)$ alterek dimenzióinak különbsége páros szám. Melyik altér a nagyobb?*

9 (Fontos gyakorló HF). *Igazoljuk, hogy tetszőleges leképezések között a kompozíció művelete mindig asszociatív, továbbá, hogy lineáris leképezések kompozíciója és skalárszorosa is lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy ha V és W vektorterek T felett, akkor* $\mathrm{Hom}(V,W)$ *vektortér,* $\mathrm{Hom}(V)$ *pedig algebra T felett. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket:* $[\lambda v]_{\mathbf{b}}=\lambda[v]_{\mathbf{b}}$, $[AB]_{\mathbf{c}/\mathbf{a}}=[A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$, $[A+B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}=[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}+[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$, $[\lambda A]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}=\lambda[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$. *Mely struktúrák közötti melyik leképezés művelettartását fejezik ki ezek az összefüggések?*

Bizonyos vektorterekben egy-egy bázist a „szokásos” bázisnak nevezzük. Ezek a következők. A T test feletti T^n vektortérben azon $b_1,\ldots,b_n$ vektorok, melyekre b_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A $T^{k\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyekben egyetlen komponens 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük). A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ bázis. A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1,0)$, $(0,1)$ pontok. A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i. Egy T testben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

Fordíts!

10. *Mutassuk meg, hogy a síkon az $(1,2)$ és $(3,4)$ pontok(hoz tartozó helyvektorok) bázist alkotnak. Mik ebben a bázisban az $(5,7)$ pont koordinátái?*

11. *Az alábbi $A : V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát is a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban.*

a) *V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítés esetében számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1,2)$, $b_2 = (-1,1)$ bázisban.*

b) *$V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, A az $1+i$ számmal való szorzás.*

c) *$V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A az $1+i$ számmal való szorzás.*

d) *$V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.*

e) *$V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, A a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).*

f) *$V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$.*

g) *$V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).*

12. *Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? A sík mely lineáris transzformációinak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?*

13. *Egy transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva ennek a transzformációnak a mátrixát az $(1,1)$, $(1,2)$ bázisban.*

14. *Alteret alkotnak-e a sík lineáris transzformációinak vektorterében azok a leképezések, melyek az $y = x$ egyenest az x-tengely egy részhalmazába képzik?*

15. *Legyen $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Igazoljuk az alábbiakat.*

a) *Ha A szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.*

b) *Ha A valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.*

c) *Ha A injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.*

d) *Ha A egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.*

16. *Legyen A lineáris leképezés. Igazoljuk az alábbiakat (a leképezéseket balról írjuk).*

a) *Van olyan B lineáris leképezés, hogy $ABA = A$ és $BAB = B$.*

b) *Ha A szürjektív, akkor B jobbinverze, ha A injektív, akkor B balinverze A-nak.*

c) *$(AX = AY \implies X = Y) \iff A$ injektív $\iff A$ balinvertálható.*

d) *$(XA = YA \implies X = Y) \iff A$ szürjektív $\iff A$ jobbinvertálható.*

17*. *Legyen A egy $k \times k$-as mátrix, melynek egy hatványa nulla. Igazoljuk, hogy $A^k = 0$.*

18. *Algebrát alkotnak-e $\mathbb{R}$ felett az $\mathbb{R}$-en értelmezett, valós értékű, folytonos függvények a szokásos, pontonkénti műveletekre? És akkor, ha a szorzást a kompozícióval helyettesítjük?*

19. *Legyen R egységelemes gyűrű, és T az egységelemet tartalmazó részteste R-nek. Mi a feltétele annak, hogy R a „szokásos” műveletekre algebrát alkosson T felett? Konstruáljunk $\mathbb{R}$ felett n-dimenziós algebrát minden $n \geq 1$ egészre.*

További gyakorlásul a Freud-könyv negyedik és ötödik fejezetének feladatait javaslom, leginkább az alábbiakat: 4.2.7, 5.1.15, 5.3.4, 5.4.3, 5.7.8.