Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Tizedik alkalom

1. *Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük:* $\mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_3^+$, $\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q *(a kvaterniócsoport),* $GL(2,2)$.

2. *Van-e a kocka szimmetriacsoportjának* S_4*-gyel izomorf részcsoportja?*

3. *Keressük meg* S_4*-nek azt a részcsoportját, amit a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoporthoz rendel. Tegyük meg ugyanezt* S_6*-ban a* D_3 *csoporttal is.*

4*. *Mely véges csoportoknak van csak egy maximális részcsoportja?*

5. *Döntsük el az alábbi* $\varphi : G_1 \to G_2$ *leképezésekről, hogy homomorfizmusok-e. Ha igen, határozzuk meg a magjukat és a képüket.*

a) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
b) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
c) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = e^x$.
d) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$.
e) $G_1 = GL(n,T)$, $G_2 = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
f) $G_1 = S_n$, $G_2 = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ *az* f *előjele (azaz* ± 1*).*
g) $G_1 = \mathbb{Z}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(a)$ *az* a *maradéka mod* n.
h) $G_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60x$.
i) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ *ha* x *forgatás,* 1 *ha* x *tengelyes tükrözés.*
j) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$.

6. *A homomorfizmus-tétel alapján igazoljuk a következő izomorfizmusokat.*

a) $\mathbb{C}^\times/\text{egységkör} \cong \text{pozitív valós számok a szorzásra}$. *Milyen geometriai alakzatok ennek a faktorcsoportnak az elemei?*
b) $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+ \cong \text{komplex egységkör a szorzásra}$.
c) $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}^\times$.
d) $\mathbb{Z}^+/n\mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}_n^+$.

7. *Állapítsuk meg az alábbi faktorcsoportok elemeinek rendjeit, és írjuk fel a szorzástábláikat:* $D_4/\{e, f^2\}$, $S_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. *A kapott faktorok izomorfak-e valamilyen ismert csoporttal?*

8. *Állapítsuk meg, milyen ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorok:*

a) $D_8/\{e, f^2, f^4, f^6\}$.
b) $A_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(32)\}$.
c) $D_n/\{e, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\}$.
d) $\mathbb{Z}_{16}^\times/\{1, 9\}$.

9. *Legyen* N *normálosztó a* G *csoportban. Rendeljük hozzá* G/N *tetszőleges* K *részcsoportjához a* K *elemeinek uniójából képzett* L *halmazt. Igazoljuk az alábbi állításokat.*

a) L *részcsoport* G*-ben, melynek indexe* G*-ben ugyanaz, mint* K *indexe* G/N*-ben.*
b) *Az így megadott megfeleltetés bijekció* G/N *összes részcsoportja, és a* G *csoport* N*-et tartalmazó részcsoportjai között.*

FORDÍTS!

c) *Ennél a megfeleltetésnél G/N normálosztói éppen a G csoport N-et tartalmazó normálosztóinak felelnek meg.*
d) *$K \cong L/N$, és ha K normálosztó, akkor $(G/N)/K \cong G/L$.*

10. *Állapítsuk meg az alább felsorolt csoportok konjugált osztályait, normálosztóit és centrumát: D_4, Q, D_3, D_5, S_4, S_5, A_4, A_5, $\mathrm{GL}(2,2)$.*

11. *Legyen N kételemű normálosztó a G csoportban. Igazoljuk, hogy $N \leq Z(G)$.*

12. *Mutassuk meg, hogy ha egy G csoport azon elemei, melyeknek a négyzete az egységelem, részcsoportot alkotnak, akkor ez egyben normálosztó is. Igaz-e mindig, hogy ez a részhalmaz részcsoport?*

13. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G/Z(G)$ ciklikus csoport, akkor G Abel.*

14. *Igazoljuk, hogy $GL(n,T)$ centruma az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.*

15. *Legyen $p > 2$ prím. A $\mathrm{GL}(3,p)$ csoportban tekintsük azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csupa 0, a főátlójában pedig csupa 1 áll. Igazoljuk, hogy egy p^3 elemszámú G részcsoportot kaptunk, mely nem kommutatív, és minden egységtől különböző eleme p rendű. Határozzuk meg ennek a csoportnak a centrumát.*

16. *Legyen G tizedrendű nemkommutatív csoport. Bizonyítsuk be a következő állításokat.*
a) *G-ben nincs tizedrendű elem.*
b) *Ötödrendű elem nem lehet felcserélhető másodrendű elemmel.*
c) *G-ben nem lehet minden elem másodrendű (vö. IX/7.).*
d) *G-ben van másodrendű elem (vö. IX/13.).*
e) *G-ben van ötödrendű elem.*
f) *Minden ötödrendű elem centralizátora ötelemű.*
g) *Minden másodrendű elem centralizátora kételemű.*
h) *G-ben öt darab másodrendű elem van, és ezek mind konjugáltak.*
i) *G-ben négy darab ötödrendű elem van.*
j) *Ha $|f| = 5$ és $|t| = 2$, akkor $tft^{-1} = f^{-1}$.*
k) *$G \cong D_5$.*
Hogyan általánosítható ez a gondolatmenet, ha G rendje egy prím kétszerese?

17. *Mutassuk meg, hogy ha P véges p-csoport valamilyen p prímre, és N nemtriviális normálosztó P-ben, akkor $|N \cap Z(P)| > 1$.*

18*. *Mutassuk meg, hogy ha P véges p-csoport valamilyen p prímre, akkor minden p indexű részcsoportja normálosztó.*

19. *Bizonyítsuk be, hogy az S_n csoportban két elem akkor és csak akkor konjugált, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma”, azaz a két felbontásban az azonos hosszúságú ciklusok száma megegyezik. Vezessük le ebből azt az elmúlt félévben gyakorlaton már bizonyított állítást, hogy S_n-ben az $(12\ldots n)$ elem centralizátora a saját hatványaiból áll.*

20*. *Mutassuk meg az előző feladat eredményéből kiindulva, n szerinti indukcióval, hogy A_n egyszerű, ha $n \geq 5$.*

21*. *Milyen n-ekre van S_n-ben Q-val izomorf részcsoport?*