Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Első alkalom

1. *Igazoljuk tetszőleges T test feletti V vektortérben az alábbi állításokat.*

a) $(\forall \lambda \in T)(\forall v \in V)(\lambda v = 0_V \iff (\lambda = 0_T \vee v = 0_V))$.

b) $(\forall v \in V)((-1_T)v = -v)$.

2. *Legyen $V = \{a, b\}$, definiáljuk az „összeadást" úgy, hogy $a + a = a + b = b + a = a$, és $b + b = b$. Definiáljuk továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén λv-t v-nek. Mely vektortéraxiómák teljesülnek? Igaz-e, hogy $(-1)v$ ellentettje v-nek minden $v \in V$-re? A $(-1)v = -v$ összefüggés bizonyításában hol használtuk ki, hogy V-ben létezik ellentett?*

3. *Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.*

4. *Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?*

a) *$V = T[x]$ a T test felett, W a páros fokú polinomok, és a zéruspolinom.*

b) *$V = T[x]$ a T test felett, W a legfeljebb tizedfokú polinomok, és a zéruspolinom.*

c) *V a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett, és $W = \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$.*

d) *V a sík $\mathbb{R}$ felett, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója.*

5. *Adjunk példát olyan V vektortérre, és W részhalmazra, mely az összeadásra zárt, de az ellentett képzésére nem. Mutassuk meg, hogy egy vektortér egy részhalmaza akkor és csak akkor altér, ha nem üres, és zárt a vektortérműveletekre.*

6. *Az alábbiakban négy bizonyítást adunk arra, hogy egy altér nulleleme megegyezik a vektortér nullelemével, ezek közül azonban csak az egyik helyes. Melyik a helyes, és mi a hiba a többiben? (Altéren itt olyan W részhalmazt értünk, ami maga is vektortér V összeadására és skalárral való szorzására nézve. A V nullelemét 0_V, a W-ét 0_W jelöli.)*

a) *Mivel $0_V + v = v$ minden $v \in V$-re, tehát W elemeire is teljesül, ezért 0_V definíció szerint W-nek is nulleleme. A W-beli nullelem egyértelműsége alapján így $0_W = 0_V$.*

b) *Ha $0_W \neq 0_V$ lenne, akkor V-ben két nullelem lenne, ami ellentmond a V-beli nullelem egyértelműségének.*

c) *Legyen $v \in W$ tetszőleges. Ekkor $0_V + v = v$ és $0_W + v = v$ egyaránt fennáll, tehát $0_V + v = 0_W + v$. Itt mindkét oldalhoz a v vektor W-beli [a negyedik bizonyításban: V-beli] ellentettjét hozzáadva a kívánt $0_V = 0_W$ egyenlőséget kapjuk.*

7. *Legyen W altere az $\mathbb{R}$ feletti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $2u+6v \in W$ és $3u + v \in W$. Következik-e ebből, hogy $u, v \in W$?*

8. *Igaz-e $\mathbb{R}$ felett, hogy $x \in \langle x^2-1, x^2-2, 3x+2\rangle$? És $\langle x, x^2+2, x+2\rangle = \langle 1, x+1, x^2+1\rangle$?*

9. *Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?*

10. *Legyen V vektortér a T test felett.*

a) *Mi az üres halmaz által generált altér?*

b) *Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.*

c) *Mikor lesz két altér uniója is altér?*

d) *Mutassuk meg, hogy ha U, V, W alterek egy vektortérben és $U \supseteq V$, akkor fennáll az úgynevezett moduláris összefüggés: $U \cap (W + V) = (U \cap W) + V$.*

FORDÍTS!

11. *Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen T testek felett igaz még ez az állítás?*

12. *Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?*

a) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^3$ vektortérben az alábbi mátrixok oszlopvektorai.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1+x, 1+2x, 1+3x\}$, $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$.

c) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.

13. *Igazoljuk az alábbiakat.*

a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.

b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

c) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$ is független.

d) Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.

14. *Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d-t.*

15. *Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ vektorok egy V vektortérben. Ha a $v_i + v_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ vektorok rendszere lineárisan független, mennyi lehet n?*

16*. *Meg lehet-e adni $\mathbb{R}^n$-ben végtelen sok vektort úgy, hogy közülük bármely n lineárisan független legyen?*

17. *Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n-dimenziós V vektortérben?*

a) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.

b) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.

c) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.

d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.

e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.

f) Ha F elemszáma n, és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.

g) Ha G elemszáma n, és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.

h) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.

i) Van olyan $n+1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.

18. *Legyen V a sík (helyvektorai), mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér.*

a) Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?

b) Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel, és adjuk meg az összes alteret.

c) Hány altere van a $\mathbb{Z}_2$ test feletti $\mathbb{Z}_2^2$ és $\mathbb{Z}_2^3$ vektortereknek? És a $\mathbb{Z}_7$ feletti $\mathbb{Z}_7^2$-nek?

19*. *A szultán gondolt $\mathbb{R}^{1001}$-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?*