**Alkalmazott matematikus szak, első évfolyam, második félév**

*Második zárthelyi — megoldásvázlatok*

**1.** Például $(x_1+x_2)^2 - x_2^2 + x_3^2$, ami indefinit.

**2.** Az elemi osztók (asszociáltság erejéig) $1, 1, x, x^3 - x^2$, ez utóbbi a minimálpolinom. Ezért a Jordan-alakban a nulla sajátértékhez egy $2 \times 2$-es és egy $1 \times 1$-es blokk, az 1 sajátértékhez egy $1 \times 1$-es blokk tartozik.

**3.** Az egyenesnek egy olyan $P = (z, z, zi, -zi)^T$ pontját keressük, melyre teljesül, hogy a $(z, z, zi, -zi)^T - (i, -i, 1, -1)^T$ vektor merőleges az egyenesre, vagyis az $(1, 1, i, -i)^T$ vektorra. A skaláris szorzatot felírva $z - i + z + i + \overline{i}(zi - 1) + \overline{-i}(-zi + 1) = 0$ adódik, ahonnan $z = -i/2$ (4 pont). A keresett távolság e különbségvektor hossza, azaz $\sqrt{5}$ (2 pont).

**4.** A $W$ altér $A$-invariáns, mert ha $w \in W$, akkor $A^2 w = Aw$, innen $A(A^2 w) = A(Aw)$, azaz $A^2(Aw) = A(Aw)$, tehát $Aw \in W$ (2 pont). A minimálpolinom gyökei a sajátértékek, tehát van olyan $0 \neq u \in V$, hogy $Au = 0$ és olyan $0 \neq v \in V$, hogy $Av = v$ (2 pont). Nyilván $u, v \in W$ (1 pont), és mivel ezek függetlenek, $\dim W \geq 2$ (1 pont).

**5.** Érdemes volt. Legyen $u$ és $v$ az utolsó két bázisvektor, akkor tehát azt tudjuk, hogy $B(v, u) = i$ és $B(v, v) = 0$. Ez ellentmond a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenségnek. (A gondolatmenet $-B$-re is megy, tehát az alak valójában indefinit).

**6.** Igen. Az $AA^*$ unitér, ezért ortonormált bázisban diagonalizálható, és a diagonálisban álló sajátértékek abszolút értéke 1. Legyen $\lambda$ egy ilyen sajátérték, és $b$ a hozzá tartozó bázisvektor, ekkor $\lambda = \langle b, \lambda b \rangle = \langle b, AA^* b \rangle = \langle A^* b, A^* b \rangle$, ami nemnegatív valós szám. Ezért $\lambda = 1$, vagyis $AA^*$ az identitás, tehát $A$ unitér, vagyis normális.