Alkalmazott matematikus szak, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi — megoldásvázlatok

1. A mátrix felbontása

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

2. A karakterisztikus polinom $x^2 + 1$, a sajátértékek $\pm i$, a sajátvektorok $(1, -1 \pm i)^T$ (és skalárszorosaik), az 1999-edik hatvány a mátrix ellentettje. Ez utóbbi állítás nemcsak számolással következik, hanem abból is, hogy a mátrix négyzete az egységmátrix ellentettje.

3. A válasz 7. Jelölje U a feladatban szereplő alteret. *Első megoldás.* Legyen $p \in V$ esetén $A(p) = p(2) - p(3)$. Az A lineáris leképezés a $\mathbb{Q}$ testbe, mint önmaga feletti vektortérbe, hiszen $A(p+q) = (p+q)(2) - (p+q)(3) = p(2) - p(3) + q(2) - q(3) = A(p) + A(q)$ (1 pont), és $A(\lambda p) = (\lambda p)(2) - (\lambda p)(3) = \lambda(p(2) - p(3)) = \lambda A(p)$ (1 pont). Az $U = \mathrm{Ker} A$ dimenzióját keressük (2 pont). Nyilván $\mathrm{Im} A = \mathbb{Q}$ (ez közvetlen számolással adódik, vagy például abból következik, hogy az egydimenziós $\mathbb{Q}$-nak csak a két triviális altere van, viszont $A(x) = -1 \neq 0$) (1 pont). Ezért a dimenziótétel miatt $\dim U = \dim V - 1 = 8 - 1 = 7$ (1 pont). *Második megoldás.* Mivel U valódi altér V-ben, hiszen például $x \notin U$ (1 pont), ezért a tanult tétel miatt $\dim U < \dim V = 8$, azaz $\dim U \leq 7$ (2 pont). Ahhoz, hogy belássuk, hogy a dimenzió legalább 7, elég megadni 7 független polinomot U-ban (1 pont). Ilyenek például 1, $(x-2)(x-3)x^i$ $(0 \leq i \leq 5)$, hiszen ezek csupa különböző fokúak (2 pont).

4. Van, például $p = 1$. A két altér akkor egyenlő, ha mindegyik generátorai kifejezhetők a másik generátorainak lineáris kombinációjaként. A baloldal generátoraival nyilván az $ax^3 + bx + c$ alakú polinomok fejezhetők ki, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}$, a jobboldalon mindegyik polinom ilyen alakú. Megfordítva, ha $p = 1$, akkor $x = (2+x) - 2p \in \langle 1 + x + x^3,\, 2 + x,\, p \rangle$, és így $x^3 = (1 + x + x^3) - p - x$ is eleme ennek az altérnek (6 pont). [Nyilván minden olyan fenti alakú p jó, ami nincs az $1 + x + x^3$ és a $2 + x$ által generált (kétdimenziós) altérben.]

5. Nem. Tegyük fel ugyanis, hogy az első 2000 vektor F rendszere független. Jelölje az utolsó vektort v, és legyen F_i az a vektorrendszer, amit az F-ből az i-edik vektor elhagyásával kapunk. Ekkor F_i is független, de a feltétel szerint v-t ehhez hozzávéve már összefüggő rendszert kapunk. Ezért v függ F_i-től (ha $1 \leq i \leq 2000$). Mivel F független, a v egyértelműen írható fel az F elemeinek lineáris kombinációjaként. A most talált 2000 felírás tehát mind ugyanaz, azaz ebben az egyértelmű felírásban minden együttható nulla. Azaz $v = 0$, ami ellentmond a feltevésnek.

6. Azok, amelyek dimenziója legalább a fele a tér dimenziójának. *Szükségesség:* a dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Im} A + \dim \mathrm{Ker} A = \dim V$, azaz $\mathrm{Im} A$ és $\mathrm{Ker} A$ közül az, amelyik dimenziója nem kisebb, az legalább $(\dim V)/2$ dimenziós, és így az összeg dimenziója is legalább ennyi. *Elégségesség:* Legyen U egy legalább $(\dim V)/2$ dimenziós altér, és ennek egy $b_1, \ldots, b_n$ bázisát egészítsük ki a $c_1, \ldots, c_k$ vektorokkal V egy bázisává, ahol tehát $n \geq k$. Legyen A olyan lineáris transzformáció, melyre $A(b_i) = 0$, és $A(c_i) = b_i$ ha $1 \leq i \leq k$. Ekkor $\mathrm{Im} A \subseteq \mathrm{Ker} A = U$, és így $\mathrm{Im} A + \mathrm{Ker} A = U$.