Alkalmazott matematikus szak, első évfolyam, második félév

Második zárthelyi

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szerző** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Mindegyik feladat hat pontot ér, az osztályzat elégtelen, ha nincs lényegében megoldott feladat (azaz ami legalább öt pontot kapott), különben pedig az összpontszám hatodrészének egész része.

1. *Alakítsuk négyzetösszeggé az $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$ kvadratikus alakot, és határozzuk meg a kvadratikus karakterét.*

2. *Adjuk meg az alábbi mátrixhoz tartozó polinommátrix normálalakját, valamint a mátrix minimálpolinomját és Jordan-alakját:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Adjuk meg $\mathbb{C}^4$-ben az $(i, -i, 1, -1)^T$ pont távolságát az $(1, 1, i, -i)^T$ vektor által generált altértől.*

4. *Legyen A lineáris transzformáció egy V vektortéren, melynek minimálpolinomja $x^3 - x$. Mutassuk meg, hogy $W = \{v \in W \mid A^2v = Av\}$ egy legalább kétdimenziós A-invariáns altér.*

5. *Egy eltépett ZH papírján egy mátrix jobb alsó sarkát láthatjuk, a mátrix sarkában 0 áll, mellette (balra) i, és alatta az az állítás szerepel, hogy a megfelelő kvadratikus alak pozitív szemidefinit. Érdemes volt-e széttépni a zárthelyit?*

6. *Legyen A egy komplex feletti euklideszi téren értelmezett lineáris transzformáció, melyre AA^* unitér. Következik-e ebből, hogy A normális?*