Alkalmazott matematikus szak, első évfolyam, második félév
Első zárthelyi

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Mindegyik feladat hat pontot ér, az osztályzat elégtelen, ha nincs lényegében megoldott feladat (azaz ami legalább öt pontot kapott), különben pedig az összpontszám hatodrészének egész része.

1. *Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló vektortér $\mathbb{R}$ felett az 1, $1-x$, $1-x+x^2$, $1-x+x^2-x^3$ bázissal, U pedig az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^{1\times 3}$ vektortér az $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ bázissal. Tekintsük azt az $A : V \to U$ lineáris leképezést, amelyre $p \in V$ esetén $A(p) = (p(1), p(-1), p(1) + p(-1))$. Írjuk fel A mátrixát a megadott bázispárban (azt nem kell belátni, hogy ezek tényleg bázisok), és bontsuk fel a kapott mátrixot rangnyi számú diád összegére.*

2. *Számítsuk ki az*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix komplex sajátvektorait, és 1999-edik hatványát.

3. *Legyen V a legfeljebb hetedfokú racionális együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló $\mathbb{Q}$ feletti vektortér. Hánydimenziós alteret alkotnak ebben azok a p polinomok, melyekre $p(2) = p(3)$?*

4. *Legyen V a $\mathbb{Q}[x]$ mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortér. Van-e olyan $p \in V$, melyre*

$$\langle 1,\ x,\ x^3 \rangle = \langle 1 + x + x^3,\ 2 + x,\ p \rangle\ ?$$

5. *Adott egy vektortérben 2001 darab nem nulla vektor. Ha az első 2000 vektor bármelyikét elhagyjuk, a megmaradó 2000 vektor lineárisan összefüggő. Kaphatunk-e független rendszert, ha az utolsó vektort hagyjuk el?*

6. *A véges dimenziós V vektortér mely alterei állnak elő $\mathrm{Im}A + \mathrm{Ker}A$ alakban, ahol A lineáris transzformációja V-nek?*