Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Kilencedik alkalom

1. *Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van, ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő, különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

2. *Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?*

3. *Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ is B-invariáns altér.*

4. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját, és számítsuk ki az M^n sorozat határértékét midőn n tart a végtelenhez.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

5. *Modulusok, illetve unitér modulusok-e az alábbi struktúrák?*

a) *A valós együtthatós polinomok az összeadásra nézve $\mathbb{Q}$ felett a $q \circ p(x) = qp(1)$ (mint konstans polinom) szorzással.*

b) *A $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ Abel-csoport az $\mathbb{R}$ gyűrű felett az $r \circ (a, b) = (ra, rb)$ szorzással.*

c) *Az előbbi G az $\mathbb{R}$ felett az $r \circ (a, b) = (ra, 0)$ szorzással.*

d) *Az előbbi G az $\mathbb{R}$ felett az $r \circ (a, b) = (ra + rb, ra - rb)$ szorzással.*

e) *Az előbbi G a $\mathbb{C}$ felett az $(r + is) \circ (a, b) = (ra, sb)$ szorzással.*

f) *Az előbbi G a $\mathbb{C}$ felett az $(r + is) \circ (a, b) = (ra - sb, rb + sa)$ szorzással.*

g) *Tetszőleges A Abel-csoport $\mathbb{Z}$ felett, ahol $n \circ a = na$ jelentése a szokásos.*

h) *Ha S részgyűrűje R-nek, akkor R az S felett, ahol az összeadás az R-beli összeadás, és $s \circ r = sr$ (R-beli szorzás).*

i) *Ha S balideálja R-nek, akkor S az R felett, ahol az összeadás az S-beli összeadás, és $r \circ s = rs$ (R-beli szorzás).*

j) *Egy halmaz összes részhalmaza a kételemű test felett, az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, $0 \circ H = \emptyset$, $1 \circ H = H$.*

6. *Tegyük $\mathbb{R}$ additív csoportját modulussá $\mathbb{R}[x]$ felett kétféleképpen. Az első modulus szorzása $p(x) \circ r = p(1)r$, a másodiké $p(x) \circ r = p(2)r$. Izomorf modulusokat kaptunk-e?*

7. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Mutassuk meg, hogy az $M = \mathbb{R}^3$ a $pv = p(A)v$ definícióval $\mathbb{R}[x]$-modulus.*

b) *Igazoljuk, hogy u generálja M-et (azaz M ciklikus).*

c) *Mutassuk meg, hogy az A-invariáns alterek éppen a részmodulusok.*

d) *Adjunk meg egy „szép” bijekciót M részmodulusai és $x(x-1)^2$ osztói között.*

8. *Az alább megadott M modulusok megadott X generátorrendszeréhez készítsük el az alaptétel bizonyításában használt mátrixot, hozzuk ezt normálalakra, és ennek alapján bontsuk fel M-et ciklikus modulusok direkt összegére.*

a) $M = \mathbb{Z}_6^+$ *a* $\mathbb{Z}$ *felett,* $X = \{2, 3\}$.

b) $M = \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ *a* $\mathbb{Z}$ *felett,* $X = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

c) $M = \mathbb{C}^n$ *mint a* $\mathbb{C}[x]$ *feletti, az alább megadott mátrixokhoz tartozó szokásos modulus,* X *pedig* $\mathbb{C}^n$ *szokásos bázisa.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

9. *Az alábbiakban megadjuk egy-egy komplex elemű (ismeretlen) mátrix determinánsosztóit. Döntsük el, van-e ilyen mátrix, és ha igen, akkor adjuk meg a minimálpolinomját és a Jordan-féle normálalakját.*

a) $\{1, 1, x^2\}$.

b) $\{1, x, x^2, x^3\}$.

c) $\{1, 1, x, x^3\}$.

d) $\{1, 1, x^2, x^3\}$.

e) $\{1, 1, 1, x^3\}$.

f) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x, x^2(x-1)^2, x^5(x-1)^4\}$.

10. *Mi annak a mátrixnak a Jordan-alakja, amelyben a diagonálissal párhuzamos, alatta lévő második ferde vonalban csupa egyesek vannak, azon kívül pedig csupa nullák?*

11*. *Igaz-e, hogy minden komplex elemű négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához?*

12*. *Igazoljuk, hogy végtelen test felett egy lineáris transzformációnak akkor és csak akkor van véges sok invariáns altere, ha minimálpolinomjának foka megegyezik a tér dimenziójával. Hány invariáns altér van ilyenkor?*

13. *Bizonyítsuk be, hogy ha M komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén M^n akkor és csak akkor tart nullához, ha M minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.*

14. *Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha B felcserélhető A-val, akkor van olyan f polinom, hogy $B = f(A)$.*

15. *Legyen A lineáris transzformáció egy komplex feletti n-dimenziós vektortéren.*

a) *Igazoljuk, hogy ha $k \le n$, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.*

b) *Mik lesznek A hatványainak sajátértékei? Mit mondhatunk ezek multiplicitásairól?*

16. *Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $v \in V$. Igazoljuk az alábbi állításokat.*

a) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ *épp a v-t tartalmazó legszűkebb A-invariáns altér.*

b) $\dim(W) = \mathrm{gr}(m_{A,v})$ *($m_{A,v}$ az V/20. feladatban definiált polinom).*

c) *Ha m_A-nak van k-adfokú irreducibilis osztója, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.*

d) *Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).*

e) *Van olyan $M \in \mathbb{Q}^{100\times 100}$ mátrix, melynek csak a két triviális invariáns altere van.*