Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Hatodik alkalom — gyakorló feladatok

0. *Egy tábla csokoládét akarunk széttördelni. A tábla n sorra és k oszlopra van osztva. A tördelés során az egész táblát először kettétörjük két téglalapra. Azután a kapott téglalapok valamelyikét ismét kettétörjük, és így tovább, addig, amíg végül mind az nk kis darab külön nem válik. Milyen stratégia szerint érdemes a tördelést végezni ahhoz, hogy minél kevesebbszer kelljen törni?*

1. *Jelölje F a síkon az origó körüli, pozitív irányú, 90° szögű forgatást, és T az $x + y = 0$ egyenesre való tükrözést. Mi lesz az (x, y) pont képe ezeknél a transzformációknál? Milyen geometriai transzformáció lesz $F \circ T$ és $T \circ F$?*

2. *Legyen A a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, B pedig az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi lesz ezeknél az $(1, 2, 3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $A \circ B = B \circ A$?*

3. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz a sík szokásos bázisában? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *Írjuk fel az előző feladatban szereplő második és harmadik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.*

6. *Páratlanországban mindenki páratlan sok embernek küldött karácsonyi ajándékot. Bárhogy is választunk ki két különböző embert, azok száma, akiknek ők mindketten küldtek ajándékot, páros. Mutassuk meg, hogy mindenki páratlan számú ajándékot kapott.*

7*. *Igazoljuk, hogy minden valós együtthatós polinomot meg lehet szorozni egy alkalmas valós együtthatós polinommal úgy, hogy a szorzatból kiessen minden olyan tag, melynek foka nem prímszám.*

8*. *Melyik az a legkisebb m egész szám, melyre igaz a következő állítás: bárhogyan is választunk ki m darab 2000-nél kisebb számot, van közöttük néhány (de legalább egy darab), melyek szorzata négyzetszám?*

9*. *Egy matematikus négyzet alakú füves kertje fel van osztva 10×10 darab egybevágó, négyzet alakú parcellára. Miközben a matematikus a tételeit bizonyította otthon, a gyomok támadásba lendültek. Ha az egyik parcella két oldalszomszédja már gyomos, akkor a következő napon ezen a parcellán is gyom nő. A matematikus kinézett az ablakon, és látta, hogy csak kilenc parcellán van gyom. Elégedetten nyújtózkodott, és kijelentette: nem érdekes, jövő nyáron sem kell gyomra feküdnöm a kertben. Igaza volt-e?*