Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Kilencedik alkalom

1. *Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszereket (ez négy külön feladat).*

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3\ (14) \\ x &\equiv 6\ (21) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &\equiv 2\ (14) \\ x &\equiv 9\ (21) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 5x &\equiv 2\ (14) \\ x &\equiv 6\ (21) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x &\equiv 4\ (14) \\ x &\equiv 9\ (21) \end{aligned}\right\}$$

2. *Melyik az a második legkisebb pozitív egész szám, amely 2-vel osztva 1-et, 5-tel osztva 3-at, 7-tel osztva pedig 4-et ad maradékul?*

3. *Egy k egész szám 4-gyel osztva 3-at, 6-tal osztva 1-et, 15-tel osztva pedig 13-at ad maradékul. Mit kapunk maradékul, ha a k számot maradékosan osztjuk 20-szal?*

4. *Oldjuk meg az $x^2 \equiv 1\ (n)$ kongruenciát, ha n rendre 7, 31, 14, 30, 8, 9, 40 (vö. VI/10).*

5. *Nevezzünk („házi" használatra) egy legfeljebb k-jegyű pozitív egészet k jegyű* **öröklődő** *számnak, ha a négyzetének utolsó k jegye éppen az eredeti számot adja (pl. a 25 öröklődő kétjegyű szám a tizes számrendszerben, hiszen $\mathbf{25}^2 = 6\mathbf{25}$; a 4 nem öröklődő egyjegyű szám a tizes számrendszerben, de öröklődő egyjegyű szám a hatos számrendszerben; a 0 és az 1 minden számrendszerben minden k-ra k jegyű öröklődő szám).*

a) Határozzuk meg a tizes számrendszerben az egyjegyű öröklődő számokat.
b) Határozzuk meg a 7 alapú számrendszerben az egy-, majd a kétjegyű öröklődő számokat.
c) Határozzuk meg a tizes számrendszerben a kétjegyű öröklődő számokat.
d) Mutassuk meg, hogy a 10-es számrendszerben legfeljebb négy darab kilencvenjegyű öröklődő szám van.

6. *Tegyük föl, hogy (s_n) egy pozitív egész számokból álló végtelen számtani sorozat, ami nem konstans. Igazoljuk, hogy a sorozatnak létezik 100 olyan egymás utáni tagja, amelyek*

a) mindegyike összetett szám;
b) egyike sem köbszám.

7. *Legyenek a és b egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Tegyük fel, hogy $1 \le r \le a$, $1 \le s \le b$, és $(r, a) = 1$ valamint $(s, b) = 1$. Mutassuk meg, hogy létezik pontosan egy olyan $1 \le x \le ab$ egész, amely relatív prím ab-hez, és amelyre $x \equiv r\ (a)$ és $x \equiv s\ (b)$.*

---

8. *Oldjuk meg kongruenciarendszerek felhasználásával (is) a VI/2, 8, 9 feladatokat.*

9. *Gondoltam egy számot 200 és 2000 között. Ha a szám 501-edik és 201-edik hatványának összegéhez még a számot is hozzáadjuk, az eredmény 998-ra végződik. Mire gondoltam?*

10. *Igazoljuk, hogy minden n egészre $930930 \mid n^{61} - n$.*

11. *Mi $49^{49^{50}}$ utolsó két jegye a tizes számrendszerben?*

12. *Határozzuk meg $43^{43^{\cdot^{\cdot^{43}}}}$ illetve $(\ldots((43^{43})^{43})\ldots)^{43}$ utolsó számjegyét a 49 alapú számrendszerben. Mindkét kifejezésben 43 darab 43 szerepel.*

13. *A tizes számrendszerben $n > 1$ darab 1-esből álló szám lehet-e négyzetszám?*