Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Nyolcadik alkalom

1. *Az Euler-Fermat tétel felhasználásával határozzuk meg* 97^{227} *és* 97^{223} *maradékát 113-mal osztva.*

2. *Egy korábbi feladatban a* 3^{279} *utolsó két jegyét kellett kiszámítani a tizes számrendszerben. Hogyan használhatjuk fel az Euler-Fermat tételt a számolásban?*

3. *Legyen* p *prím, és* c *tetszőleges egész. Mutassuk meg, hogy* $c^{p^p} \equiv c\ (p)$.

4. *Igazoljuk, hogy ha* $n > 0$ *páratlan egész, akkor* $2^{n!} - 1$ *osztható* n*-nel.*

5. *Legyenek* a *és* m *pozitív egészek,* b *tetszőleges egész, és* $(a, m) = 1$*. Mutassuk meg, hogy az* $ax \equiv b\ (m)$ *kongruencia egyetlen megoldása* $x \equiv a^{\varphi(m)-1}b\ (m)$.

6. *Legyen* p *a* $10n - 1$ *szám egyik prímosztója. Mutassuk meg, hogy* $10^{p-2} \equiv n\ (p)$.

7. *Határozzuk meg az összes olyan* n *pozitív egész számot, amelyre* $\varphi(n)$ *értéke 1, 2, illetve 4. Mikor lesz* $\varphi(n)$ *értéke páratlan?*

8. *Igaz marad-e* $\varphi(n)$ *képlete, ha* n *kanonikus alakjában nulla kitevőket is megengedünk?*

9. *Legyen* n *és* k *pozitív egész. Igazoljuk az alábbiakat.*
a) $\varphi(n^2) = n \cdot \varphi(n)$.
b) Ha $n \mid k$, *akkor* $\varphi(n) \mid \varphi(k)$.
c) $\varphi(nk)\varphi((n, k)) = (n, k)\varphi(n)\varphi(k)$.

10. *Felveszi-e* φ *a 6, illetve a 26 értéket? Benne van-e minden 30-nál nagyobb páros szám a* φ *értékkészletében?*

11. *Legyen* t *tetszőleges pozitív egész. Mutassuk meg, hogy nincs olyan* y *természetes szám, amelyre* $\varphi(y) = 2 \cdot 13^t$.

12. *Létezik-e olyan* k *pozitív egész, amelyre a* $\varphi(x) = k$ *egyenletnek végtelen sok megoldása van?*

13. *Oldjuk meg a következő „egyenleteket”.*
a) $\varphi(x) = x$.
b) $\varphi(x) = x - 1$.
c) $\varphi(x) = x - 2$.
d) $2\varphi(x) = x$.
e) $3\varphi(x) = x$.
f) $\varphi(x) \mid x$ *(ez nehezebb!).*

14. *Mi a nagyságviszony* $\varphi(mn)$ *és* $\varphi(m)\varphi(n)$ *között? Mikor áll egyenlőség?*

15. *Tegyük fel, hogy* $c_1, c_2, \ldots, c_{\varphi(m)}$ *redukált maradékrendszer mod* m*. Igazoljuk, hogy akkor* $c_1^{\varphi(m)-1}, c_2^{\varphi(m)-1}, \ldots, c_{\varphi(m)}^{\varphi(m)-1}$ *is redukált maradékrendszer mod* m.

16. *Tegyük fel, hogy* p *prímszám, és* $a_1, \ldots, a_{p-1}$ *és* $b_1, \ldots, b_{p-1}$ *redukált maradékrendszerek mod* p*. A* p *mely értékeire fordulhat elő, hogy* $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{p-1}b_{p-1}$ *is redukált maradékrendszer mod* p*?*