Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Hetedik alkalom — gyakorló feladatok kongruenciákra

1. *Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:*
a) $7x \equiv 3\ (17)$.
b) $152x \equiv 88\ (66)$.
c) $555x \equiv 5555\ (55555)$.

2. *Határozzuk meg azt a két legkisebb pozitív egész számot, melynek* 13*-szorosa a hetes számrendszerben felírva* 43*-ra végződik.*

3. *Mely c egészekre teljesül, hogy $c^2 + 1 \mid c^3 + 1$?*

4. *Legyenek a és b egészek. Mutassuk meg, hogy $2a + 3b$ akkor és csak akkor osztható* 17*-tel, ha $9a + 5b$ osztható* 17*-tel.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy $a^3 - b^3$ és $a - b$ ugyanazt a maradékot adja* 6*-tal osztva.*

6. *Bizonyítsuk be, hogy $23 \mid 61^{k+1} + 11^k 7^{2k} 3^{3k} 2^{5k+3}$.*

7. *Adjuk meg $999^{777^{888}}$ utolsó három számjegyét a tizes számrendszerben.*

8. *Számítsuk ki 3^{279} utolsó két jegyét a tizes számrendszerben.*

9. *Legyen p páratlan prímszám. Milyen maradékot ad p-vel osztva $\binom{2p}{p}$?*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, akkor*

$$\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right]\ (p)$$

(itt $[x]$ az x egész része, azaz az x-nél nem nagyobb egészek legnagyobbika).

11. *Legyen $a, b, c, d, n, m \in \mathbb{Z}$, $m, n > 0$, $n \mid m$. Mely állítások igazak az alábbiak közül?*
a) $a \equiv b\ (m) \implies a \equiv b\ (n)$. *Igaz-e a megfordítás?*
b) $a \equiv b\ (m)$ *és* $c \not\equiv d\ (m) \implies a + c \not\equiv b + d\ (m)$.
c) $a \equiv b\ (m)$ *és* $c \not\equiv d\ (m) \implies ac \not\equiv bd\ (m)$.
d) $a \not\equiv b\ (m)$ *és* $c \not\equiv d\ (m) \implies a + c \not\equiv b + d\ (m)$.
e) *A* $\not\equiv\ (m)$ *reláció tranzitív.*

12. *Legyen n pozitív egész. Mely k értékekre szabad „k-adik gyököt vonni” az $a^k \equiv b^k\ (2^n)$ kongruenciából tetszőleges* **páratlan** *a, b esetén?*

13. *Igazoljuk, hogy ha k és n páratlan természetes számok, akkor $1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k$ osztható n-nel. Páros n-re milyen maradékot kapunk?*

14*. *Az úttörőtábor gyülekező terét m fa állja körbe, mindegyiken egy mókus ül. A mókusok össze akarnak gyűlni egy fán, de csak úgy változtathatják a helyüket, hogy mindig egyszerre két mókus ugrik át a szomszédos fára, ellenkező körüljárási irányban. Milyen m esetén tudnak összegyűlni a mókusok?*