**Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév**
*Hatodik alkalom*

**1.** *Oldjuk meg az alábbi ismeretlenes kongruenciákat:*
*a)* $202x \equiv 157$ (203).
*b)* $309x \equiv 451$ (617).
*c)* $5x \equiv 561$ (1968).
*d)* $105x \equiv 741$ (809).

**2.** *Az egészkor elindított szalagról 14 percenként jön le egy tévé. Mutathat-e az óránk egy ilyen pillanatban egész óra 27 percet? És egész óra 2 percet? Mikor fordul ez először elő?*

**3.** *Mit ad maradékul* $312^{1999^{2001}}$ *a 313-mal maradékosan osztva?*

**4.** *Mutassuk meg, hogy* $2^{2^{6n+2}} + 3$ *minden* $n$ *természetes számra osztható 19-cel.*

**5.** *Legyen* $p$ *tetszőleges prímszám. Igazoljuk a következőket:*
*a)* $\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1$ $(p)$.
*b) Ha* $k$ *egész, és* $1 \le k \le p-1$, *akkor* $\binom{2p-k}{p-k} \equiv 1$ $(p)$.

**6.** *Legyen* $m > 1$ *egész. Milyen maradékot adhat* $(m-1)!$ *az* $m$*-mel maradékosan osztva?*

**7.** *Legyen* $p$ *prím.*
*a) Mit ad maradékul* $(p-2)!$ *a* $p$*-vel maradékosan osztva?*
*b) Mit ad maradékul* $(p-3)!$ *a* $p$*-vel maradékosan osztva?*
*c) Igazoljuk, hogy* $p^2 | (2p-1)! - p$.
*d) Mit ad maradékul* $(p+1)! - p!$ *a* $p^3$*-nel maradékosan osztva?*
*e) Mutassuk meg, hogy* $p^p | (p^2-1)! - p^{p-1}$.

---

**8.** *Egy kisbaba ötóránként eszik (éjjel-nappal), először hétfő reggel nyolckor.*
*a) Melyek azok a napok az első két héten (vasárnapig bezárólag), amikor délben eszik?*
*b) Melyik az első olyan hét, amikor a menetrend az első hetivel azonos?*

**9.** *Adjuk meg az összes olyan ötszáznál kisebb pozitív egészet, mely a tizes számrendszerben kilencre, a tizenhármas számrendszerben egyre végződik.*

**10.** *A 210 alapú számrendszerben hány olyan egyjegyű szám van, melynek négyzete egyre végződik? Általánosítsuk a feladatot!*

**11.** *Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat (*$n \ge 0$ *tetszőleges egész).*
*a)* $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.
*b)* $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.
*c)* $641 \mid 2^{2^5} + 1$ *(Euler). Használjuk fel, hogy* $2^7 \cdot 5 = 640 \equiv -1$ (641) *és* $2^4 \equiv -5^4$ (641).
*d)* $a - b \mid a^n - b^n$ $(a, b \in \mathbb{Z})$.
*e)* $7 \mid 4^n \cdot 3^{2n} + 6^{2n+1}$.
*f)* $17 \mid 5^{2n+1}2^{4n} + 3^{4n+1}53^{n+2}$.

**12.** *Egy bolha ugrál egy szabályos* $n$*-szög csúcsain úgy, hogy mindig* $k$ *élnyit halad előre. Hányat kell ugrania, hogy visszakerüljön a kiindulópontba? Hány kört tesz meg ezalatt?*