Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Ötödik alkalom

1. *Melyik az a legkisebb $n > 0$ egész szám, melyre $d(n)$ értéke a) 11; b) 10; c) 9; d) 8?*

2. *Oldjuk meg a $d(3n) = 2d(n)$, a $d(3n) = 3d(n)$ és a $d(3n) = d(2n)$ egyenleteket.*

3. *Mely természetes számoknak van kevesebb 3-mal osztható osztójuk, mint 3-mal nem osztható?*

4. *Legyen n pozitív egész.*
a) Mely n-ekre lesz $d(n)$ értéke n, $n-1$, illetve $n-2$?
b) Igazoljuk, hogy $d(n) \leq (n/2) + 1$.
c) Igazoljuk, hogy $d(n) \leq (n/3) + 2$.
d) Igazoljuk, hogy $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.

5. *Oldjuk meg a $\sigma(2n) = 2\sigma(n)$ illetve a $\sigma(2n) = 3\sigma(n)$ egyenleteket.*

6. *Adjuk meg a $\sigma(n) = n + k$ egyenlet összes megoldását abban az esetben, ha $k = 5$, 14, illetve 1.*

7. *Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ egész, és n nem prím és nem is egy prímszám négyzete, akkor $\sigma(n) \geq (\sqrt{n}+1)^2$. Mely pozitív k értékekre van végtelen sok megoldása az előző feladatban szereplő egyenletnek?*

8. *Igazoljuk, hogy minden pitagoraszi számhármasban van 3-mal, van 4-gyel és van 5-tel osztható szám is.*

---

9. *Lehet-e egy pozitív egésznek több $3k+2$ alakú pozitív osztója, mint $3k+1$ alakú?*

10. *Egy sah börtönének 400 cellájában egy-egy rab sínylődik. A zárak egy elfordításra nyílnak, még egy elfordításra csukódnak. Eredetileg minden ajtó zárva van. A sah elhatározza, hogy nagylelkű lesz, és megparancsolja az egyik őrnek, hogy fordítson egyet valamennyi záron. Közben azonban meggondolja magát, és utánaküld egy másik őrt, hogy minden második záron fordítson egyet. A harmadik őr minden harmadik záron változtat, stb., végül a négyszázadik őr a négyszázadik cella zárjának állását módosítja. Azok szabadulnak ki, akiknek most nyitva áll az ajtaja. Hány rabot bocsátott szabadon a sah?*

11. *Tegyük fel, hogy a, b, d pozitív egészek, és $d \mid ab$. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x, y pozitív egészek, amelyekre $x \mid a$, $y \mid b$, és $d = xy$. Mikor egyértelmű az x, y számpár?*

12. *Oldjuk meg a $\sigma(5n) = 6\sigma(n)$, a $\sigma(5n) = 16\sigma(n)$ és a $\sigma(5n) = 90 + \sigma(n)$ egyenleteket.*

13. *Legyen p prímszám, k nemnegatív egész. Mutassuk meg, hogy $\sigma(p^k) < 2 \cdot p^k$.*

14. *Legyen $m > 1$ egész. Igazoljuk, hogy $\sigma(6^m) > 2 \cdot 6^m$.*

15. *Mutassuk meg, hogy ha a és n pozitív egész és $\sigma(a) > 2a$, akkor $\sigma(na) > 2na$.*

16. *Mutassuk meg, hogy ha $n > 2$ egész, akkor tagja egy pitagoraszi számhármasnak. Mely n pozitív egészek lehetnek egy alapmegoldás tagjai?*

17. *Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek mindhárom oldala egész szám, és az átfogójához tartozó magasság az egyik befogó 2/3-szorosa?*