**Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév**
*Negyedik alkalom*

**1.** *Legyen az $n > 0$ egész szám kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\alpha_\ell}$.*
  a) *Van-e olyan egész szám, melynek köbe 120?*
  b) *Van-e olyan racionális szám, melynek köbe 120?*
  c) *Mikor lesz $n$ egy egész illetve racionális szám köbe? És $k$-adik hatványa?*
  d) *Tegyük fel, hogy $n$ és $m$ relatív prím pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy ha $nm$ teljes $k$-adik hatvány, akkor $n$ is és $m$ is az.*
  e) *Keressünk két olyan relatív prím, nem feltétlenül pozitív, de nem nulla egész számot, melyek szorzata teljes négyzet, de a tényezők nem azok.*

**2.** *Legyen $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\alpha_\ell}$ és $b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\beta_\ell}$ e két pozitív egész közös kanonikus alakja.*
  a) *Számitsuk ki 60 és 126 közös kanonikus alakját, és ebből a legnagyobb közös osztójukat és a legkisebb közös többszörösüket.*
  b) *Mutassuk meg, hogy $[a, b]$ kanonikus alakjában $p_i$ kitevője $\max(\alpha_i, \beta_i)$.*
  c) *Igazoljuk, hogy $(a, b)[a, b] = ab$.*

**3.** *Egy téglalap alakú négyzethálós papír 7-tel osztható számú négyzetből áll. Mutassuk meg, hogy valamelyik oldala 7-tel osztható számú négyzetből áll!*

**4.** *Melyek azok a $q$ pozitív egész számok, melyekre teljesül, hogy tetszőleges relatív prím $a$ és $b$ egészekre $q \mid ab \implies q \mid a$ vagy $q \mid b$?*

**5.** *Tudjuk, hogy a $\mathbb{Z}$-beli $p$ prím negyedik hatványa osztja $c^2 - 25$-öt. Mely $p$-kre következik ebből, hogy $p^4$ osztója $c - 5$-nek vagy $c + 5$-nek?*

**6.** *Legyen $P$ a páros számok köre.*
  a) *Adjuk meg 60 összes felbontását $P$-ben felbonthatatlanok szorzatára.*
  b) *Mik a $P$-beli egységek, felbonthatatlanok és prímek?*

---

**7.** *Melyek azok a $p$ természetes számok, melyekre $p$, $p + 2$ és $p + 4$ mindegyike prímszám?*

**8.** *Igazoljuk, hogy ha $p$ is és $p^2 + 2$ is prímszám, akkor $p^3 + 4$ is az. Igaz-e, hogy ha $p$ is és $p^2 + 5$ is prímszám, akkor $p^3 + 4$ is az?*

**9.** *Igaz-e a következő állítás: egy tizes számrendszerben felírt pozitív (nem prím) számnak mindig meg lehet egy alkalmasan választott jegyét változtatni úgy, hogy prímet kapjunk?*

**10*.** *Az 1-től $2n$-ig terjedő számok közül ki akarunk választani néhányat úgy, hogy egyik se ossza egyik másikat se. Igazoljuk, hogy $n$ szám kiválasztható így, de $n + 1$ már nem.*

**11*.** *Mely $n$ egészekre lesz az $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ összeg egész szám?*

**12.** *Jelölje $R$ az $a + b\sqrt{2}$ alakú $(a, b \in \mathbb{Z})$ számok körét.*
  a) *Igazoljuk az $(x^2 - 2y^2)(z^2 - 2t^2) = (xz + 2yt)^2 - 2(xt + yz)^2$ azonosságot.*
  b) *Mutassuk meg, hogy $a+b\sqrt{2}$ pontosan akkor egység $R$-ben, ha $a^2 - 2b^2 = \pm 1$. Adjunk meg végtelen sok egységet.*
  c) *Igazoljuk, hogy ha $|a^2 - 2b^2|$ egy $\mathbb{Z}$-beli prím, akkor $a + b\sqrt{2}$ felbonthatatlan $R$-ben.*
  d) *Bontsuk fel $R$-ben a $13 + 2\sqrt{2}$ számot felbonthatatlanok szorzatára.*
  e) *Igaz-e, hogy ha $|a^2 - 2b^2| = |c^2 - 2d^2|$, akkor $a + b\sqrt{2}$ és $c + d\sqrt{2}$ asszociáltak $R$-ben?*