Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Harmadik alkalom

1. *Végezzük el az euklideszi algoritmust a* 220 *és* 184 *számokra, majd a kapott eredményt a tanult visszahelyettesítési eljárással állítsuk elő* $220x + 184y$ *alakban (ahol* $x, y \in \mathbb{Z}$*). Tegyük meg ugyanezt a* 9991 *és* 3589*, illetve a* 12543 *és a* 29447 *számokkal is.*

2. *Rendelkezésünkre áll egy 17 literes és egy 21 literes kanna. Ezeket akárhányszor megtölthetjük a csapnál, és a tartalmukat (teljes egészében) beönthetjük egy tartályba. Kimérhető-e ezzel a módszerrel 50 liter, illetve 400 liter víz? Ha azt is megengedjük, hogy a tartályból kimerjünk vizet (21 illetve 17 literes egységenként), betölthető-e 50 liter víz?*

3. *Legyenek* a, b *pozitív egészek,* $(a, b) = 7$*. Milyen értékeket vehet fel* $(a + b, a - b)$*?*

4. *Igazoljuk, hogy ha* a *és* b *egészek, akkor* $(a, b) = (11a + 5b, 9a + 4b)$*.*

5. *Legyen* n *egész szám. Határozzuk meg* $(n^2 + 1, 2n^2 + 9)$ *lehetséges értékeit.*

6. *Legyen* $d = (a, b)$*, és tegyük fel, hogy* u *és* v *olyan egészek, amelyekre* $ua + vb = d$*. Mi lehet ekkor* u *és* v *legnagyobb közös osztójának az értéke?*

7. *Legyenek* a *és* b *pozitív egészek,* $(a, b) = 1$*. Igazoljuk, hogy létezik olyan* **pozitív** x *és* y *egész, hogy* $ax - by = 1$*.*

8*. *Határozzuk meg* $2^{2^k} + 1$ *és* $2^{2^m} + 1$ *legnagyobb közös osztóját, ha* $k \neq m$ *nemnegatív egészek. Mutassuk meg az eredmény felhasználásával, hogy végtelen sok prímszám van.*

9*. *Mutassuk meg, hogy bárhogy is veszünk egymás utáni négy, hat, sőt* 16 *pozitív egész számot, van közöttük olyan, ami az összes többihez relatív prím.*

10*. *Legyenek* $a \geq b > 0$ *egészek. Mutassuk meg, hogy az* (a, b) *kiszámítására szolgáló euklideszi algoritmus során*

a) ha mindegyik maradékos osztásnál a legkisebb abszolút értékű maradékot vesszük figyelembe, akkor az eljárás legfeljebb $1 + \log_2 b$ *lépésben véget ér;*

b) az eljárás akkor is véget ér legfeljebb $1 + 2\log_2 b$ *lépésben, ha végig nemnegatív maradékokkal számolunk.*

11*. *Az asztalon sorba raktunk kétfilléreseket. Ketten a következő játékot játsszák: felváltva kiválasztanak egy, a fej oldalával felfelé álló érmét, és ezt, valamint az összes tőle jobbra lévő pénzdarabot az ellenkező oldalára fordítják. Az veszít, aki már nem tud lépni. Bizonyítsuk be, hogy a játék véges sok lépésben véget ér. A kezdeti állapotról hogyan dönthető el, melyik játékosnak van nyerő stratégiája?*

Gyakorló feladatok

12. *Egy királyfi hét- és tízfejű sárkányokkal csatázott, és levágta mind a 116 fejüket. Hány sárkányt ölt meg?*

13. *Legyenek* a *és* b *olyan egészek, amelyeknek a legnagyobb közös osztója* 14*. Mi lehet ekkor* $(3a + 2b, 4a + 3b)$*, illetve* $(a + b, 5a + 3b)$ *értéke?*

14. *Bizonyítsuk be az* $(a, b) = (a - kb, b)$ *azonosságot* $(a, b, k \in \mathbb{Z})$*.*

15. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges* a, b, c *egészekre* $(ab, ac) = a(b, c)$ *és* $(a^2, b^2) = (a, b)^2$*.*