Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Második alkalom

1. *Vezessük le az alábbi két azonosságot a mértani sor összegképletéből, és a második képletet az elsőből.*

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + - \cdots + b^{2n})\,.$$

2. *Mutassuk meg, hogy* $2^{111111} - 1$ *összetett szám. Hogyan lehet általánosítani az állítást?*

3. *Mutassuk meg, hogy* $2^{111111} + 3^{111111}$ *osztható 35-tel.*

4. *Mutassuk meg, hogy* $2^{3072} + 1$ *összetett szám. Hogyan lehet általánosítani az állítást?*

5. *Bizonyítsuk be, hogy minden* n *természetes számra* $2^{4n+1} + 3$ *osztható 5-tel.*

6. *Bizonyítsuk be, hogy minden* n *természetes számra* $2^{3n+6} + 3^{4n+2}$ *osztható 73-mal.*

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha* n *pozitív egész, akkor* $(n+1)^n - 1$ *osztható* n^2*-tel.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha* n *nemnegatív egész, akkor* $2^{2n} + 6n - 1$ *osztható 9-cel.*

9. *Mutassuk meg, hogy*
- *a) két egymás után következő egész szám szorzata mindig osztható 2-vel;*
- *b) három egymás után következő egész szám szorzata mindig osztható 6-tal;*
- *c) négy egymás után következő egész szám szorzata mindig osztható 24-gyel.*

Mit mondhatunk öt egymás után következő egész szám szorzatáról?

10. *Mutassuk meg a modulo 8 szorzástábla felhasználásával, hogy páratlan szám négyzete 8-cal osztva mindig 1 maradékot ad. Adjunk erre az észrevételre közvetlen bizonyítást is.*

11. *Megoldható-e az egész számok körében az* $x^2 + 5y = 1002$ *egyenlet?*

12. *A modulo 5 maradékok vizsgálatával mutassuk meg, hogy* $a^5 - a$ *minden egész* a*-ra osztható 5-tel. Milyen* a *egészekre igaz, hogy* $a^4 - 1$ *osztható 5-tel?*

13. *Igazoljuk, hogy ha* a *tetszőleges egész,* n *pedig 1-nél nagyobb egész, akkor* $a^{2^n+1} - a$ *osztható 10-zel.*

Gyakorló feladatok

14. *Bizonyítsuk be, hogy* $11^{10} - 1$ *osztható 120-szal.*

15. *Bizonyítsuk be, hogy* $2^{70} + 3^{70}$ *osztható 13-mal.*

16. *Bizonyítsuk be, hogy* $3^m + 1$ *semmilyen* m *természetes számra sem osztható 8-cal.*

17. *Bizonyítsuk be a 9-cel és 11-gyel való oszthatóság ismert két szabályát a 10-es számrendszerben. Általánosítsuk ezeket a szabályokat tetszőleges,* g *alapú számrendszerre.*

18. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok körében.*
- *a)* $x^2 - 4y = 10.$
- *b)* $x^2 - 3y = 20.$
- *c)* $x^2 + 3y^2 = 2z^2.$

19. *Mely* x *egészekre teljesül, hogy* $5 \mid x^2 - 2x + 2$*? És az, hogy* $7 \mid x^2 - 2x + 2$*?*