Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Tizenkettedik alkalom

A **Nagy Prímszámtétel** azt mondja ki, hogy

$$\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}} \to 1 \quad \text{ha } n \to \infty$$

(itt $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb pozitív prímek száma, és a log a természetes logaritmus). Ha a, b egészek, akkor jelölje $\pi_{a,b}(x)$ az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú pozitív prímek számát. Dirichlet tételének élesítése, a **számtani sorozatok prímszámtétele** azt mondja ki, hogy ha a értékét rögzítjük, akkor mindegyik $ak + b$ számtani sorozatban körülbelül ugyanannyi prímszám van, bárhogy is választjuk az a-hoz relatív prím b számot. Azaz

$$\frac{\pi_{a,b}(n)}{\frac{n}{\log n}} \to \frac{1}{\varphi(a)} \quad \text{ha } n \to \infty\,.$$

1. *Számítsuk ki az alábbi értékeket. Használjuk fel, hogy* $\lim_{n\to\infty} n^\varepsilon / \log n = \infty$, *ha* $\varepsilon > 0$.

a) $\pi_{12,5}(100)$.

b) $\pi_{12,3}(234971)$.

c) $\pi_{12,5}(54807) - \pi_{12,125}(54807)$.

d) $\lim_{n\to\infty} \pi_{12,5}(n)/\sqrt{n}$. *Miből van több,* $12k+5$ *alakú prímből, vagy négyzetszámból?*

e) $\lim_{n\to\infty} \pi_{30,7}(n)/\pi_{11,5}(n)$. *Miből van több,* $30k+7$ *alakú, vagy* $11k+5$ *alakú prímből?*

f) $\lim_{n\to\infty} \pi_{22,17}(2n)/\pi_{22,17}(n)$.

2*. *Bizonyítsuk be a Csebisev-tétel következő általánosítását: van olyan* N *szám, hogy minden* $n \geq N$*-re* n *és* $1.00001n$ *között van* $22k + 17$ *alakú prím. Még általánosabban: minden* a, b *relatív prím egészekhez, és* $\varepsilon > 0$ *valós számhoz van olyan* N *egész, hogy minden* $n \geq N$*-re* n *és* $(1 + \varepsilon)n$ *között van* $ak + b$ *alakú prím.*

3. *Legyen* $1 \leq k \leq 9$. *Mutassuk meg, hogy létezik olyan egymilliónál nagyobb prímszám, amelynek az első számjegye a* k.

4. *Bizonyítandó: ha* n *az 1-nél nagyobb egész szám, akkor* $n!$ *nem lehet teljes hatvány.*

5*. *Mutassuk meg, hogy* $1 \leq k < n$ *esetén* $\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$ *nem egész szám.*

6.** *Igazoljuk, hogy van olyan szám, ami legalább 2000-féleképpen áll elő egy* $100k + 11$ *alakú és egy* $47k + 23$ *alakú prím összegeként. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be azt az állítást, amelyben az 2000, 100, 11, 47, 23 helyett „általános" számok szerepelnek.*

7*. *Jelölje* q_n *az* n*-edik* $4k - 1$ *alakú prímet. (Mivel egyenlő* q_8*?)*

a) Mutassuk meg, hogy $q_{n+1} \leq 4q_1q_2 \ldots q_n - 1$, *és innen* $q_n \leq 2^{2^n}$.

b) Mutassuk meg a prímszámtétel felhasználása nélkül, hogy $\pi_{4,3}(x) \geq [\log_2 \log_2 x]$.

8.** *Jelölje* $p_n^{a,b}$ *az* n*-edik* $ak+b$ *alakú prímszámot, ahol* a, b *rögzített, relatív prím egészek. Igazoljuk, hogy* $p_n^{a,b}/n\log(n) \to \varphi(a)$, *ha* $n \to \infty$. *(Vegyük észre, hogy* $\pi_{a,b}(p_n^{a,b}) = n$, *és alkalmazzuk a számtani sorozatok prímszámtételét.) Mutassuk meg ugyanezzel a módszerrel azt is, hogy az* n*-edik prímszám értéke „körülbelül"* $n \log n$.