Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Tizenegyedik alkalom

1. *(Ismétlés, vö. X/9.) Tegyük fel, hogy a és m egészek, és $(a, m) = 1$.*
a) Határozzuk meg $o_m(a^3)$ értékét, ha $o_m(a) = 30$.
b) Határozzuk meg $o_m(a^3)$ értékét, ha $o_m(a) = 31$.

2. *Legyen $(a, m) = 1$. Tegyük fel, hogy b olyan egész szám, amelyre $ab \equiv 1\ (m)$. Mutassuk meg, hogy akkor $o_m(b) = o_m(a)$. Felírható-e b mint a alkalmas hatványa modulo m?*

3. *Legyen p prím, a egész, és $(a, p) = 1$. Határozzuk meg $o_p(-a)$ lehetséges értékeit, ha*
a) $o_p(a) = 20$;
b) $o_p(a) = 19$;
b) $o_p(a) = 18$.
Igaz-e tetszőleges modulus esetén, hogy $-a$ rendje csak a rendje, vagy a rendjének a kétszerese, vagy a rendjének a fele lehet?

4. *Legyenek a és b egész számok, és tegyük fel, hogy $59 \mid a^2 + b^2$. Mutassuk meg, hogy akkor $a^2 + b^2$ osztható 59^2-nel is. Igaz-e hasonló állítás 59 helyett 61-re?*

5. *Igazoljuk a Dirichlet-tétel felhasználása nélkül, hogy végtelen sok $6k - 1$, illetve* **nem** *$8k + 1$ alakú prím van.*

6. *Tegyük fel, hogy az a és b egészek* **nem** *relatív prímek. Legfeljebb hány prím lehet az $ak + b$ sorozatban ($k = 1, 2, \dots$)?*

7. *Van-e olyan prímszám, amelynek a számjegyei között legalább egymillió darab 5-ös található?*

8. *Mutassuk meg, hogy a $0.23571113171923\dots$ szám irracionális. (Úgy kapjuk ezt a számot, hogy a tizedespont után sorban leírjuk a prímek számjegyeit.)*

9. *Van-e végtelen sok $8k - 1$ alakú szám, ami hat különböző prím szorzata?*

10. *Bizonyítsuk be, hogy a Fermat- és a Mersenne prímeken kívül még végtelen sok prímszám van.*

11*. *Bizonyítsuk be, hogy vannak „izolált” prímek, azaz minden N pozitív egészhez létezik olyan p prím, hogy $p - N$ és $p + N$ között nincs más prím, csak p. Logikailag hogyan viszonylik ez az állítás a hézagtételhez?*

12. *Van-e akármilyen nagy, a tizes számrendszerben eggyel kezdődő prím?*

13. *Hány nullára végződik $\binom{2000}{1000}$ (a tizes számrendszerben felírva)?*

14.** *Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{(2n)!\,(2m)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ egész szám.*

15*. *Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok természetes szám, mely nem írható fel egy négyzetszám és egy pozitív prímszám összegeként.*

16. *Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egészet, melyre n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ mindegyike prímhatvány.*