Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Tizedik alkalom

1. *(**Vizsgaanyag!**) Tegyük fel, hogy az a és az m relatív prím egész számok.*

a) *Legyen k és t pozitív egész. Mutassuk meg, hogy*

$$a^k \equiv a^t \ (m) \iff k \equiv t \ (o_m(a))\,.$$

b) *Igazoljuk, hogy az a pontosan akkor primitív gyök mod m, ha $1, a, a^2, \ldots, a^{\varphi(m)-1}$ redukált maradékrendszer mod m.*

2. *Határozzuk meg az n-hez relatív prím számok rendjeit, ha $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 24$. A felsorolt számok közül melyekre létezik primitív gyök?*

3. *Tudjuk, hogy $c^{54} \equiv -1 \ (109)$, és $c^{36} \not\equiv 1 \ (109)$. Mennyi $o_{109}(c)$?*

4. *Tegyük fel, hogy $a^{20} \equiv 1 \ (31)$ és $a^9 \equiv 1 \ (31)$. Mit ad maradékul az a szám 31-gyel maradékosan osztva?*

5. *Tegyük fel, hogy $a^{14} \equiv 1 \ (53)$. Mit ad maradékul az a^6 szám 53-mal maradékosan osztva?*

6. *Tegyük fel, hogy $a^{33} \equiv -1 \ (71)$. Mit ad maradékul az a^{22} szám 71-gyel maradékosan osztva?*

7. *Tegyük fel, hogy $b^{12} \equiv -1 \ (71)$. Igazoljuk, hogy minden háromszög belső szögeinek összege $341.2°$.*

8. *Tegyük fel, hogy $a^{15} \equiv 17 \ (54)$. Mutassuk meg, hogy a primitív gyök mod 54. Következik-e ebből a feladatból, hogy van primitív gyök mod 54?*

9. *Ha az a elem rendje t modulo n, mennyi lesz a^2 rendje? És az a^3 rendje? Bizonyítsuk be általában, hogy $o_m(a^k) = o_m(a)/(o_m(a), k)$ (vö. VI/12).*

10. *Legyenek k és ℓ pozitív egészek, a pedig tetszőleges egész, és $d := (a^k - 1, a^\ell - 1)$.*

a) *Mutassuk meg (ismétlés gyanánt!) hogy $a^{(k,\ell)} - 1 \mid d$.*

b) *Igazoljuk, hogy $a^k \equiv 1 \ (d)$ és $a^\ell \equiv 1 \ (d)$.*

c) *Jelöljük $o_d(a)$ értékét t-vel; mutassuk meg, hogy $t \mid (k, \ell)$, és így $d \mid a^{(k,\ell)} - 1$.*

d) *Állapítsuk meg, hogy $(a^k - 1, a^\ell - 1) = a^{(k,\ell)} - 1$.*

11. *Legyenek a és m pozitív egész számok, és jelöljük $(a^m - 1)$-et c-vel.*

a) *Ellenőrizzük, hogy $(a, c) = 1$, és határozzuk meg $o_c(a)$ értékét.*

b) *Igazoljuk, hogy $m \mid \varphi(a^m - 1)$.*

c)* *Igazoljuk, hogy végtelen sok $7k + 1$ alakú prím van.*

---

12. *Mely p prímekre lesz $o_p(2) = 6$?*

13. *Igazoljuk, hogy ha p prím és $o_p(a) = 3$, akkor $o_p(1 + a) = 6$.*

14. *Mutassuk meg, hogy $a^4 + 1$ minden páratlan prímosztója $8k + 1$ alakú.*

15*. *Igazoljuk, hogy ha p prím és g primitív gyök mod p^n, akkor g primitív gyök mod p.*

16*. *Mely páratlan prímekre van olyan primitív gyök, melynek ellentettje is az?*

17.** *Mely n pozitív egészekre igaz, hogy $n \mid 2^n - 1$?*