Matematikus szak, második évfolyam, első félév

Második zárthelyi — megoldásvázlatok, eredmények

1. A szokásos eljárással számolva az eredmény $\theta + 1$.

2. A normálalakban a főátló elemei $1, 1, x, x^2 - x^3$, ezért a minimálpolinom $x^3 - x^2$ (az utolsó polinom normálva), a karakterisztikus polinom pedig $x^4 - x^3$ (a négy polinom szorzatának asszociáltja, $(-1)^4$ főegyütthatóval). A sajátértékek ezek gyökei, azaz 0 és 1. A Jordan-alakban az 1 sajátértékhez egy darab 1×1-es blokk tartozik, a 0 sajátértékhez pedig egy 2×2-es, valamint egy 1×1-es (hiszen a minimálpolinomban szereplő kitevő az adott sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete, a karakterisztikus polinomban szereplő kitevő pedig az adott sajátértékhez tartozó blokkok méretének összege).

3. Legyen $\alpha = \sqrt[3]{5} + \sqrt{5}$. Nyilván α gyöke az $(x - \sqrt[3]{5})^2 - 5$ polinomnak, ami $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ fölötti, és így a keresett minimálpolinom ennek osztója. Ahhoz, hogy ez a minimálpolinom, elég belátni akár azt, hogy ez irreducibilis $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ fölött (amit könnyű ellenőrizni, mert ez a polinom másodfokú, és $\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$), akár azt, hogy α foka $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ fölött 2, azaz hogy $|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{5} + \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})| = 2$. Ez következik abból, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{5} + \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{5})$, ami hatodfokú $\mathbb{Q}$ fölött, mert $\sqrt[3]{5}$ és $\sqrt{5}$ fokai relatív prímek $\mathbb{Q}$ fölött.

4. Csak két egység van: az 1 és a -1 maradékosztályai. Ez közvetlen számolással is belátható, de elegánsabb a következő. Vegyük minden polinom együtthatóit mod 3. Ez egy φ homomorfizmust ad $\mathbb{Z}[x]$-ből $\mathbb{Z}_3[x]$-re, melynek magja $(3) \supseteq (3x)$. Így ez a homomorfizmus jóldefiniált $\mathbb{Z}[x]/(3x)$-en is (vö. második izomorfizmus-tétel). Egység képe nyilván egység lesz, de $\mathbb{Z}_3$ test, és így $\mathbb{Z}_3[x]$ egységei a nem nulla konstansok. Ezért $\mathbb{Z}[x]/(3x)$-ben egység csak konstans polinom maradékosztálya lehet. Ezek $\mathbb{Z}$-vel izomorf részgyűrűt alkotnak.

5. Nem. Tegyük fel, hogy $b_1, \ldots, b_n$ bázis. Ekkor $b_2 b_1 - b_1 b_2 = 0$, azaz a függetlenség miatt $b_1 b_2 = 0$, és így $b_1 = 0$ vagy $b_2 = 0$. Tehát egy kivétellel minden b_i nulla. Legyen ez a kivétel a $b = b_1$. Ekkor $b \mid x$ és $b \mid y$, azaz b egység, de M elemeinek konstans tagja nulla.

6. Csak a négy nyilvánvaló van. Alkalmazzuk a főtételt az $(x^3 - 5)(x^2 - 5)$ polinom felbontási testére. Ez 12 fokú bővítés, amit e polinom öt gyöke generál. A Galois-csoport permutálja ezek gyökeit külön-külön, így részcsoportja $S_3 \times S_2$-nek, és a rendje miatt egyenlő is ezzel. A $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{5})$ test a komplex konjugálás fixpontjainak a halmaza, hiszen ez másodrendű elem, és így hatodfokú test tartozik hozzá. A komplex konjugálás egy t transzpozíció S_3-ban, mely $x^2 - 5$ gyökeit fixálja. Tehát azt kell megnézni, hogy hány olyan részcsoportja van $S_3 \times S_2$-nek, ami a (t, id) elemet tartalmazza. Ez közvetlen számolással is adódik, de némi csoportelméletet alkalmazva semmit sem kell számolni. [Ha ugyanis H ilyen nemtriviális részcsoport, akkor rendje 4, vagy 6. Az előbbi esetben 2-Sylow, és így tartalmazza a centrumbeli $\{id\} \times S_2$-t, vagyis $H = \{id, t\} \times S_2$. A másik esetben viszont az indexe 2, azaz normálosztó, és így t konjugáltjait tartalmazza, vagyis $H = S_3 \times \{id\}$.]

7. A transzformációhoz tartozó modulus minden elemének a rendje osztója a p minimálpolinomnak, ami prím, és ezért ez a modulus p rendű ciklikusok direkt összege. Egy p rendű ciklikus modulus dimenziója p foka, és így ez osztója a tér dimenziójának. Tehát vagy p elsőfokú, és így a transzformáció nyújtás, vagy p hetedfokú, és akkor ő a karakterisztikus polinom is. (A karakterisztikus mátrix főátlójával is hasonlóan okoskodhattunk volna.)