Matematikus szak, második évfolyam, első félév
Első zárthelyi — megoldásvázlatok

1. Igen, mert A_4 2-Sylowja négyelemű, S_3-é kételemű, ezek tehát kommutatívak. E két részcsoport direkt szorzata is kommutatív tehát, és ez $A_4 \times S_3$-nak 2-Sylowja lesz, hiszen a rendje 2-hatvány (8), indexe pedig $3 \cdot 3$, azaz páratlan. (Mellesleg ez a csoport $\mathbb{Z}_2^3$.)

2. Nincs. Mivel $380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$, a 19-Sylowok száma csak 1 vagy 20 lehet, hiszen 20-nak osztója, és kongruens 1-gyel modulo (19). Ha 1, akkor készen vagyunk, hiszen a 19-Sylow normálosztó. Hasonlóképpen az 5-Sylowok száma csak 76 lehet. Ekkor azonban 19 rendű elemből $20(19-1)$ darab van (hiszen prímrendű részcsoportok csak az egységelemben metszhetik egymást). Ugyanígy 5 rendű elem $(5-1)76$ van, és ez így együtt több, mint 380.

3. Nem. A csoport rendje 20. Ha nilpotens lenne, akkor a Sylowjainak a direkt szorzata lenne, de azok Abel-félék a rendjük miatt, tehát a csoport is kommutatív lenne. (Sok más megoldás is van, például megszámolhatjuk a másodrendű elemeket, és abból látszik, hogy nem csak egy darab 2-Sylow van; vagy kiszámolhatjuk, hogy a csoport centruma triviális; vagy alkalmazhatjuk azt a tényt, hogy nilpotens primitív csoport csak prímrendű lehet.)

4. Nincs más, csak A_5. Ugyanis egy 2-tranzitív részcsoport rendje osztható $5(5-1) = 20$-szal, de mivel A_5 egyszerű, minden valódi részcsoportjának legalább 5 az indexe.

5. Hételemű. Ugyanis $bab^{-1} = a^2$, ezért $b^2ab^{-2} = ba^2b^{-1} = a^4$, és így tovább, végül $b^7ab^{-7} = a^{2^7}$, másfelől viszont $b^7 = 1$ miatt ez az elem a-val egyenlő. Tehát $a^{128} = a$, ami $a^5 = 1$-gyel együtt azt adja, hogy $a = 1$, azaz a csoport legfeljebb hételemű (hiszen b hatványaiból áll). Másrészt $\mathbb{Z}_7^+$-ban $b = 1$ és $a = 0$ nyilván megfelelő.

6. A $(tf, 1)$ elem tizedrendű. Valóban, $(tf, 1)^2 = (tf\varphi(tf), 0) = (tfttft, 0) = (f^{-2}, 0)$, ami nyilván ötödrendű. Ezért $(tf, 1)$ rendje 5 vagy 10, de 5 nem lehet, mert a páratlan hatványainak második komponense mindig 1. A G csoport izomorf $D_5 \times \mathbb{Z}_2^+$-szal! Jelölje ugyanis N a $(h, 0)$ alakú elemekből álló (D_5-tel izomorf) G-beli normálosztót. Tudjuk, hogy $(e, 1)$ ugyanúgy hat az N-en, mint $(t, 0)$, tehát e két elem hányadosa, azaz $g = (e, 1)^{-1}(t, 0) = (t, 1)$ triviálisan hat. E másodrendű g elem centralizátora tehát N-et és g-t is tartalmazza, és így az egész G. Vagyis $g \in Z(G)$, és így g az egységelemmel együtt egy K normálosztót alkot. Nyilván $N \cap K$ az egységelem, és ezért a rendek miatt $NK = G$.

7. Igaz. Elég belátni, hogy ha H komplementum, akkor $H \cap \Phi(G)$ egyelemű, hiszen a komplementumok lefedik G-nek a magon kívüli részét. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és legyen P egy p-Sylow részcsoport $H \cap \Phi(G)$-ben. Elég belátni, hogy $P \lhd G$, hiszen akkor P-t tartalmaznák H konjugáltjai is, ami Frobenius-csoportban lehetetlen. Tudjuk, hogy $\Phi(G)$ nilpotens, azaz a Sylowjai karakterisztikus részcsoportok. Vagyis elég belátni, hogy P Sylowja $\Phi(G)$-nek is, azaz hogy $|\Phi(G) : P|$ nem osztható p-vel. Azt tudjuk, hogy $|H \cap \Phi(G) : P|$ nem osztható p-vel, és $|\Phi(G) : P| = |\Phi(G) : H \cap \Phi(G)| \cdot |H \cap \Phi(G) : P|$, viszont $|\Phi(G) : H \cap \Phi(G)| = |H\Phi(G) : H|$, és ez osztója $|G : H|$-nak, tehát elég erről megmutatni, hogy p-vel nem osztható. Legyen $g \in P \leq H$ egy p rendű elem, akkor g fixpontmentesen hat G-nek az N magján, azaz minden orbit p hosszú, és így $|N| - 1$ osztható p-vel. Mivel $|N| = |G : H|$, készen vagyunk.