Matematikus szak, második évfolyam, első félév

Második zárthelyi

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Mindegyik feladat hat pontot ér, az osztályzat elégtelen, ha nincs lényegében megoldott feladat (azaz ami legalább öt pontot kapott), különben pedig az összpontszám hatodrészének egész része.

1. *Legyen θ az $x^3 - x - 1$ polinom (egyetlen) valós gyöke. Írjuk fel a $\theta^2/(\theta^2 - 1)$ számot $a + b\theta + c\theta^2$ alakban, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}$.*

2. *Hozzuk normálalakra az*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz tartozó polinommátrixot, majd olvassuk le róla M minimálpolinomját, karakterisztikus polinomját és Jordan-alakját.

3. *Határozzuk meg $\sqrt[3]{5} + \sqrt{5}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ fölött.*

4. *Hány invertálható eleme van a $\mathbb{Z}[x]/(3x)$ gyűrűnek?*

5. *Legyen $R = \mathbb{Z}[x, y]$, és M az ${}_R R$ modulus x és y által generált részmodulusa. Előáll-e M, mint véges sok ciklikus modulus direkt összege?*

6. *Határozzuk meg $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{5})$ közbülső testeit.*

7. *Egy hétdimenziós vektortéren értelmezett lineáris transzformáció minimálpolinomja irreducibilis, de a karakterisztikus polinomja nem. Igaz-e, hogy a transzformáció nyújtás?*