Matematikus szak, második évfolyam, első félév

Részletes vizsgatematika

A vizsgák reggel negyed kilenckor kezdődnek, helyük aznap reggel ki lesz írva a szobám melletti faliújságra (Kecskeméti u. 10–12, II. 203). Akkorra három ember jöjjön, azután 20 percenként egyvalaki. Egy nap maximum 12 ember vizsgázhat. Halasztani szabad, a faliújságra kitett jelentkezési lista áteditálásával, de a halasztások miatt nem lesz új vizsganap, tehát csak oda írjátok be magatokat, ahol van hely! A **konzultációk** időpontját mindig ki fogom írni, ez sokszor délután (például az előző napi vizsga után) lesz.

Az anyag az, ami az előadáson (illetve részben a gyakorlaton) elhangzott. Ajánlott irodalom: Fried Ervin: *Általános algebra I-II* (a frissen megjelent kék, illetve a régebbi sárga egyetemi tankönyv), Fuchs László: *Algebra* (egyetemi jegyzet). Az én homepage-emről letölthető (eredetileg tanárszakosoknak szánt, részletes magyarázatokkal ellátott) csoportelméleti jegyzet vége használható ebben a félévben is (Sylow tételek, direkt szorzat). Az NB jelentése: a bizonyítást nem kell tudni. A GY jelentése: a bizonyítás a gyakorlaton szerepelt.

Csoportelmélet. A direkt szorzat fogalma. A direkt szorzat belső jellemzése véges sok tényező esetén. Diszkrét direkt szorzat. Elem rendje a direkt szorzatban, a direkt szorzat mikor ciklikus. A véges Abel-csoportok alaptétele, egyértelműség (mint az euklideszi gyűrű feletti modulusokra vonatkozó tétel speciális esete).

Csoport automorfizmusa és belső automorfizmusa, automorfizmus-csoport. A ciklikus csoportok automorfizmus-csoportja (GY). Csoport hatása normálosztón konjugálással, szemidirekt szorzat. Karakterisztikus részcsoport.

A faktorcsoport részcsoportjainak, mellékosztályainak, és normálosztóinak teljes inverz képe az eredeti csoportban, kapcsolatuk. A két izomorfizmus-tétel. Normállánc, kompozíciólánc, főlánc, finomítás, láncok faktorai és izomorfizmusa. A Jordan-Hölder tétel. Schreier tétele (NB).

Feloldható csoportok, ezek osztálya zárt a részcsoport, a homomorf kép, a véges direkt szorzat képzésére, és a bővítésre (GY). Minden Abel-csoport, véges p-csoport, illetve páratlan rendű véges csoport feloldható (az utóbbi állítás a Feit-Thompson-tétel következményeként). Burnside tétele: ha egy véges csoport rendje csak két prímmel osztható, akkor a csoport feloldható (NB).

Egy csoport hatása a részcsoportjainak halmazán konjugálással. Részcsoport normalizátora, ennek indexe a részcsoport konjugáltjainak a száma. A H normalizátora a legnagyobb részcsoport, amiben H normálosztó. Két részcsoport szorzatának rendje, ez mikor részcsoport (GY).

A p-Sylow-részcsoport fogalma, a Sylow-tételek. A p-Sylow részcsoportok száma, ez osztója az indexének. Egy p-Sylow részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha csak egy van belőle. Következmény: a pq rendű csoportok szerkezete, számuk (utóbbi NB).

Két elem kommutátora. A H és K normálosztók kommutátorrészcsoportja mint a megfelelő kommutátorok által generált részcsoport, ez normálosztó, része H és K metszetének, és a legkisebb olyan normálosztó, amely szerinti faktorban a H és a K képének elemei felcserélhetők. A csoport kommutátorrészcsoportja, a legnagyobb Abel-féle homomorf kép.

További két oldal!

A feloldhatóság jellemzése a kommutátorlánc segítségével. A kommutátorlánc főlánc, sőt elemei karakterisztikus részcsoportok.

A centrális lánc fogalma és jellemzése a kommutátor segítségével, nilpotens csoportok. A nilpotens csoportok osztálya zárt a részcsoport, a homomorf kép, a véges direkt szorzat képzésére, de a bővítésre általában nem (GY). A Frattini-részcsoport fogalma. A Frattini-elv. A véges nilpotens csoportok jellemzései (a normalizátor-feltétel, a Wieland-tétel, p-csoportok direkt szorzata). A Frattini-részcsoport a nem-generátorok halmaza, és mindig nilpotens (NB). Burnside bázis tétele, véges p-csoport minimális generátorrendszerének elemszáma (NB).

Nilpotens csoport konstrukciója egységelemes gyűrű nilpotens ideálja segítségével, a felső háromszögmátrixok csoportja ($\mathrm{T}(n,T)$ és $\mathrm{U}(n,T)$). A nemkommutatív p^3 rendű csoportok konstrukciója. Izomorfia erejéig kettő van belőlük (NB). További mátrixcsoportok: $\mathrm{GL}(n,T)$ és centruma, $\mathrm{SL}(n,T)$, $\mathrm{PGL}(n,T)$, $\mathrm{PSL}(n,T)$, rendjeik. A $\mathrm{PSL}(n,T)$ egyszerű, kivéve $\mathrm{PSL}(2,2)$, $\mathrm{PSL}(2,3)$ (NB).

A szabad csoport fogalma és megadása. Definiáló relációk, Dyck tétele. A Nielsen-Schreier tétel (NB).

Permutációcsoportok. Permutációcsoport mint G-set, ekvivalencia, hatás magja (GY). Minden tranzitív permutációcsoport ekvivalens egy részcsoport szerinti mellékosztályokon való hatással. Többszörös (szigorú) tranzitivitás, regularitás. Abel-féle tranzitív csoport reguláris (GY). Egy tranzitív csoport akkor és csak akkor k-szorosan tranzitív, ha a stabilizátorok $k-1$-szeresen tranzitívak, egy n elemű halmazon ható k-tranzitív csoport rendje osztható $n(n-1)...(n-k+1)$-gyel. Egy csoport automorfizmuscsoportja mikor hat többszörösen tranzitívan az egységtől különböző elemeken. Az affin csoport, ennek tranzitivitása. A projektív egyenes törtlineáris leképezéseinek példája szigorúan 3-tranzitív csoportra. A Frobenius-csoport fogalma, példák, Frobenius tétele (NB).

G-set kongruenciája. Megfeleltetés tranzitív csoport esetén a kongruenciák és a stabilizátort tartalmazó részcsoportok között. Következmény: a kongruenciaosztályok elemszáma egyenlő. Primitivitás, ennek jellemzése (a stabilizátorok maximális részcsoportok). Prímfokú tranzitív csoport primitív. Minden 2-tranzitív csoport primitív. Primitív csoport nemtriviális normálosztója tranzitív.

Legyen G részcsoportja S_X-nek, N tranzitív normálosztó G-ben, H pedig egy X-beli pont G-beli stabilizátora. Ekkor $G = NH$ és $C_G(N)$ triviálisan metszi H-t. Ha N reguláris (speciálisan ha N Abel), akkor a H ugyanúgy hat konjugálással N-en, mint X-en. Következmény: ha G sokszorosan tranzitív, akkor ez megszorításokat jelent N-re. Ha N Abel-féle akkor G beágyazható az $\mathrm{Aff}(N)$ csoportba. Következmények: feloldható primitív csoportok foka és beágyazhatósága $\mathrm{Aff}(n,p)$-be, az S_p tranzitív feloldható részcsoportjai, A_n egyszerű ha n legalább 5.

Az A_n automorfizmuscsoportja S_n, ha $n \neq 2,3,5$ (NB). Schreier-sejtés, a majdnem egyszerű csoport fogalma. Burnside tétele 2-tranzitív csoportok minimális normálosztóiról (NB). A Mathieu-csoportok fokai és tranzitivitása (NB).

Gyűrűk és modulusok. A maximum-feltétel ekvivalens alakjai, kapcsolat a véges generáltsággal. Egy egységelemes integritási tartomány akkor és csak akkor alaptételes, ha a főideálokra érvényes a maximum-feltétel, és minden irreducibilis elem prím. Következmény: főideálgyűrű, euklideszi gyűrű alaptételes.

A modulus fogalma, unitér modulus, példák. Homomorfizmus, faktormodulus. Részmodulus, a generált részmodulus elemeinek képlete, ciklikus modulus. Direkt szorzat és belső jellemzése. A szabad modulusok leírása.

A bázis fogalma, és kapcsolata a ciklikus részmodulusok direkt összegére való felbonthatósággal. Erős értelemben vett bázis és szabad generátorrendszer. Ha a modulusban megadunk egy bázist, akkor egy részmodulus egy generátorrendszere egy mátrixszal adható meg. A mátrix elemi átalakításainak kapcsolata a bázis illetve a generátorrendszer megváltoztatásával. Euklideszi gyűrű felett minden mátrix elemi átalakításokkal normálalakra hozható. Következmény: euklideszi gyűrű feletti végesen generált modulus ciklikusok direkt összege, és minden részmodulusa is végesen generált. A rend fogalma, kapcsolat a fellépő ciklikus modulusok generátorelemeinek rendjei, és a mátrix normálalakjának főátlójában szereplő elemek között. Ciklikus modulus felbontása prímhatványrendű ciklikusakra.

A felbontás egyértelműségének kérdése. Torzió-részmodulus, a szerinte vett faktor torziómentes. A nulla rendű elemek által generált ciklikus tényezők száma egyértelmű. Az $M[p]$ részmodulus, ez vektortér az $R/(p)$ test felett, dimenziója a p-hatványrendű tényezők száma. Az $M[p]$ szerinti faktor felbontásában szereplő tényezők rendjei, az egyértelműség bizonyítása.

A Jordan-normálalakról szóló tétel bizonyítása modulusok segítségével. A karakterisztikus mátrix szerepe, normálalakjában az utolsó elem a minimálpolinom. Következmény: a Cayley-Hamilton tétel. A blokkok méreteinek leolvasása a normálalakról, determinánsosztók (GY).

Galois-elmélet. A testbővítés fogalma, foka, adott elemekkel generált bővítés. Minimálpolinom, algebrai és transzcendens elemek. Egyszerű testbővítés, ennek szerkezete, ha a generáló elem transzcendens.

Az egyszerű testbővítések szerkezete algebrai elemmel való bővítés esetén, előállítás faktorgyűrűként. A bővítés foka egyenlő a minimálpolinom fokával. Egymás utáni bővítések fokainak szorzástétele. Következmények: elem foka osztója a bővítés fokának, összeg és szorzat fokának becslése. Minden véges bővítés algebrai. Az algebrai elemek résztestet alkotnak, az algebrai számok teste. Algebrailag zárt bővítés létezése (bizonyítás jövőre).

A tökéletes test fogalma, minden nulla karakterisztikájú test tökéletes. Minden véges test tökéletes (bizonyítás jövőre). Tökéletes test véges bővítése egyszerű.

A felbontási test fogalma, egyértelműsége, kiterjesztési tétel. Normális bővítés, polinom felbontási teste normális. Relatív automorfizmus, a Galois-csoport fogalma. A Galois-elmélet főtétele. Konjugáltság, a konjugáltak a minimálpolinom gyökei. Konjugált résztestek és konjugált részcsoportok kapcsolata, normális közbülső test Galois-csoportja mint faktorcsoport.