Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

A csoportelmélet feladatok eredményei, a kevésbé triviális feladatok megoldásvázlatai

Az alábbiakban TIX és TX az előző félévben szerepelt két csoportelméleti feladatsorra, a CSS pedig a Czédli-Szendrei-Szendrei feladatgyűjteményre utal (amelyben útmutatások is és megoldásvázlatok is vannak). Végül S=Fried Ervin: *Általános algebra* (a sárga könyv).

I/1. $(gh)*x = g*(h*x)$ a hatás definíciója miatt, és így $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$.

I/2. $g*(ah) = aH$ minden a-ra akkor és csak akkor, ha $gaH = aH \iff a^{-1}ga \in H \iff g \in aHa^{-1}$.

I/3. Tekintsük G hatását a H szerinti bal mellékosztályokon. Ennek magja nem G (I/2 miatt), tehát $\{e\}$ (mert G egyszerű). Így az I/1-beli leképezés injektív, és beágyazza G-t S_n-be (homomorfizmus-tétel).

I/4. $H \triangleleft K \iff (\forall k \in K)(kH = Hk) \iff K \subseteq N_G(H)$.

I/5. D_4-gyel. Valóban, $|S_4| = 2^3 \cdot 3$, tehát a 2-Sylow 8-elelmű, és megfordítva, minden 8-elemű részcsoport 2-Sylow. A Sylow-tétel miatt ezek konjugáltak, tehát izomorfak is, vagyis elég egy 8-elemű részcsoportot találni. A D_4 diédercsoport hat a négyzet csúcsain, tehát I/1 miatt izomorf S_4 egy részcsoportjával.

I/6. $\underline{S_3}$: három 2-Sylow, egy 3-Sylow. $\underline{D_n}$: a forgatások részcsoportjának minden részcsoportja normálosztó D_n-ben (vö. II/2). Ezért $p > 2$ esetén minden Sylow-ból csak egy van (hiszen ha egy p Sylow normálosztó, akkor minden konjugáltja önmaga, és a Sylow-tétel miatt ezek az összes p-Sylowok). Ha $n = 2^k m$, ahol m páratlan, akkor a 2-Sylowok száma m (mert az előzőek miatt minden 2-Sylow tartalmazza a kettőhatványrendű forgatásokat). $\underline{S_4}$: Ha egy p-Sylow rendje p, akkor bármely két p-Sylow metszete e, tehát a p rendű elemek száma $p-1$-szer a p-Sylowok száma. Mivel S_4-ben nyolc hármasciklus van, a 3-Sylowok száma 4. Az innen kimaradó 15 elem (a ciklusfelbontásból láthatóan) másod- és negyedrendű, tehát a 2-Sylowok unióját alkotja. Ezért több, mint egy 2-Sylow van. Másrészt a 2-Sylowok száma egy 2-Sylow normalizátorának az indexe, azaz $24/8 = 3$-nak osztója. Tehát 3 darab 2-Sylow van. (Ezek páronként ugyanabban a 4-elemű Klein-féle normálosztóban metszik egymást.) $\underline{A_5}$: Az ötösciklusok száma 24, tehát az 5-Sylowoké $24/(5-1) = 6$. A hármasciklusok száma 20, tehát a 3-Sylowoké $20/(3-1) = 10$. A fennmaradó 15 elem két-két transzpozíció szorzata. Ezek öt 2-Sylowot alkotnak, amelyek páronként csak $\{e\}$-ben metszik egymást. Ugyanis az 5 stabilizátora A_4-gyel izomorf, amiben a 2-Sylow normálosztó (mert ebben a stabilizátorban csak három másodrendű elem van), és e stabilizátor konjugáltjai a többi stabilizátorok (vö. TIX/21). (Ezek szerint tehát egy 2-Sylow normalizátora A_4-gyel izomorf. Az 5-Sylowok normalizátorai $60/6 = 10$-eleműek, és D_5-tel izomorfak, hiszen az ötszög csúcsain való hatás alapján D_5 részcsoportja A_5-nek, és ebben az 5-Sylow normálosztó. Hasonlóan látszik, hogy a 3-Sylowok normalizátora S_3-mal izomorf.)

I/7. $\underline{200} = 2^3 \cdot 5^2$: az 5-Sylowok száma osztója 8-nak, és kongruens eggyel modulo 5, tehát csak 1 lehet, vagyis az 5-Sylow normálosztó. $\underline{204} = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$: a 17-Sylow normálosztó. $\underline{260} = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$: a 13-Sylow normálosztó. $\underline{56} = 2^3 \cdot 7$: a 7-Sylowok száma csak 1 vagy 8 lehet. Ha 1, akkor ez normálosztó. Ha 8, akkor nem hetedrendű elem $56 - 8(7-1) = 8$ van, tehát csak egyetlen 2-Sylow fér el (és ez akkor normálosztó).

I/8. A G véges csoport $\overline{G} \leq S_G$ Cayley-reprezentációjában a g elem $|G|/|g|$ darab $|g|$ hosszú ciklusra bomlik. Ez akkor páratlan permutáció, ha $|g|$ páros, de $|G|/|g|$ páratlan, vagyis ha $|g|$ osztható egy 2-Sylow rendjével. Tehát akkor és csak akkor van $\overline{G}$-ben páratlan permutáció, ha G 2-Sylowja ciklikus. Ebben az esetben A_G valódi normálosztóban metszi a $\overline{G}$-t, melynek indexe legfeljebb kettő, mert $|S_G| \geq |A_G\overline{G}| = |A_G||\overline{G}|/|A_G \cap \overline{G}|$, vagyis $|\overline{G}|/|A_G \cap \overline{G}| \leq |S_G|/|A_G| = 2$. Ha tehát G egyszerű, akkor kételemű (ez az egyetlen kivétel).

I/9. $\underline{120} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$: az 5-Sylowok száma csak 6 lehet, ezért I/3 miatt G beágyazható S_6-ba, sőt az I/8 megoldásában használt gondolatmenet miatt A_6-ba is (különben lenne benne 2 indexű normálosztó). De akkor G indexe A_6-ban $360/120 = 3$ lenne, ami I/3 miatt lehetetlen, hiszen A_6 is egyszerű (vö. CSS 6/202/a). $\underline{180} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$: az iménti gondolatmenet most is ellentmondásra vezet, ha G-ben van legfeljebb 6 indexű valódi részcsoport. Tehát az 5-Sylowok száma sem 6, és így 36. (Ezért az 5-Sylow normalizátora önmaga, vagyis Frobenius tételét használva kész is lennénk!) Az ötödrendű elemek száma $36(5-1) = 144$. A 3-Sylowok száma sem lehet 4, ezért az 10. Ha a 3-Sylowok páronként diszjunktak lennének, akkor már nem férnének el a 3-hatványrendű elemek. Tehát alkalmas P_1 és P_2 3-Sylowokra a $H = P_1 \cap P_2$ elemszáma 3. Ekkor $C_G(H)$ tartalmazza P_1-et és P_2-t is, tehát a Sylow-tétel miatt rendje legalább $9 \cdot 4$, azaz indexe legfeljebb 5 (vö. CSS 6/202/b). $\underline{312} = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$: a 13-Sylow normálosztó. $\underline{616} = 2^3 \cdot 7 \cdot 11$: a 11-Sylowok száma 56 (tehát ez is Frobenius-csoport), a 7-Sylowok száma legalább 8, tehát csak egy 2-Sylow fér el. 1960 $= 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$: a 7-Sylowok száma 8, tehát I/3 miatt G beágyazható S_8-ba, de annak rendje nem osztható 49-cel.

I/10, 11, 13, 14. CSS 6/191, CSS 6/193, CSS 6/201, CSS 6/188.

I/12. Feltehető, hogy $p < q < r$. Ekkor az r-Sylowok száma csak pq lehet, ez $pq(r-1)$ darab r rendű elem. A q-Sylowok száma legalább r, ez összesen $r(q-1)$ darab q rendű elem. A p-Sylowok száma legalább q, ez $q(p-1)$ darab p rendű elem. Összesen ez több, mint pqr.

I/15. Legyenek P_1 és P_2 olyan p-Sylowok, melyek D metszete a lehető legnagyobb elemszámú. Ha $|D| = 1$, akkor a szokásos leszámlálásból adódik, hogy csak egy q-Sylow fér el. Tegyük fel, hogy $|D| > 1$. Ekkor $N = N_G(D)$ nem lehet p-csoport, mert akkor benne lenne egy P p-Sylowban, és a normalizátor-feltétel miatt $P \cap P_1 > D$ lenne. Ezért N tartalmaz egy Q q-Sylowot. Ekkor $G = QP_1$ (a rendek miatt), és így D minden G-beli konjugáltja része P_1-nek. Tehát a D által generált normálosztó is része P_1-nek.

I/16. Ha $g \in N_G(X)$, akkor legyen $\varphi(g)(x) = gxg^{-1}$ (azaz $\varphi(g) \in S_X$). A φ homomorfizmus S_X-be, és magja pont $C_G(X)$. Ha X részcsoport, akkor $\varphi(g) \in \mathrm{Aut}(X)$, és a homomorfizmus-tétel miatt kész vagyunk.

I/17. A $\mathbb{Z}_n^+$ homomorfizmusait egyértelműen meghatározza az 1 képe. Ha ez automorfizmus, akkor az 1 képe generátor. A $\varphi \mapsto \varphi(1)$ izomorfizmus $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n^+)$ és $\mathbb{Z}_n^\times$ között. A Klein-csoport szorzási szabálya szimmetrikus, így az egységtől különböző elemek bármely permutációja automorfizmus, tehát az automorfizmus-csoport S_3. A kvaterniócsoportbeli i, j, k-t mint térbeli egységvektorokat képzelve láthatjuk, hogy $\mathrm{Aut}(Q)$ izomorf a kocka mozgáscsoportjával, azaz S_4-gyel (vö. CSS 6/239). Végül $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$ (csupa belső automorfizmus, vö. V/8).

I/18. Ez benne van az általam írt (az előző félévben használt) tanárszakos csoportelmélet jegyzetben.

I/19. Olyan A és B normálosztókat keresünk, melyekre $A \cap B = \{e\}$, $AB = G$. Ha G ciklikus, akkor minden részcsoportja egy elemmel generálható, és így könnyű megkapni az összes részcsoportot, amik mind normálosztók (mert minden ciklikus csoport kommutatív). Ennek alapján $\mathbb{Z}_6^+$-nak négy részcsoportja van, és $\mathbb{Z}_6^+$ a $\{0, 2, 4\}$ és $\{0, 3\}$ normálosztók direkt szorzata, vagyis $\mathbb{Z}_6^+ \cong \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$. A $\mathbb{Z}_8^+$ csoportnak is négy részcsoportja van, de nincs nemtriviális direkt felbontása. A $\mathbb{Z}^+$ csoportnak sincsen, mert ha $a, b \neq 0$ egészek, akkor $ab \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, és így e metszet nem lehet $\{0\}$. Ugyanígy $\mathbb{Q}^+$ is direkt felbonthatatlan: ha $p/q \in A$ és $r/s \in B$, akkor $pr \in A \cap B$. A $\mathbb{C}^+$ csoportnak viszont sok direkt felbontása van, például bármely két különböző, origón átmenő egyenesnek direkt összege.

Általában belátható, hogy ha $(m, n) = 1$, akkor $\mathbb{Z}_{mn}^\times \cong \mathbb{Z}_m^\times \times \mathbb{Z}_n^\times$ (lásd a tanárszakos csoportelmélet jegyzet függelékét). Ennek alapján $\mathbb{Z}_{15}^\times$ felbontható, és valójában $\mathbb{Z}_{15}^\times$ az $\{1, 2, 4, 8\}$ és $\{1, 11\}$ normálosztók direkt szorzata. A $\mathbb{Z}_{16}^\times$ csoport a $\{1, 15\}$ és $\{1, 3, 9, 11\}$ normálosztók direkt szorzata (amelyek ciklikusak, és így $\mathbb{Z}_{16}^\times \cong \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$). A D_3, D_4, Q, A_4 csoportoknak tavaly kiszámoltuk a normálosztóit, és ebből látszik, hogy mindegyik direkt felbonthatatlan, mint S_5 is, melyben kiszámolható, hogy egyetlen valódi normálosztója A_5. Végül legyen $A = \{e, f^2, f^4, t, tf^2, tf^4\} \lhd D_6$ és $B = \{e, f^3\} \lhd D_6$. Így $D_6 \cong D_3 \times \mathbb{Z}_2^+$.

I/20. Minden Abel-csoport prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzata. Hányféleképpen bontható fel például a 48 prímhatványok szorzatára? A 3 mindig szerepel. A 16 felbontásait a legnagyobb benne szereplő szám szerint csoportosíthatjuk. Ha ez 16, akkor a felbontás egytényezős. Ha 8, akkor csak $8 \cdot 2$ lehet. Ha 4, akkor $4 \cdot 4$ és $4 \cdot 2 \cdot 2$ adódik, ha 2, akkor csak $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Összesen tehát 5 lehetőség van. A kapott öt csoport az alaptétel egyértelműségi állítása miatt egymással páronként nem izomorf. Például $\mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ és $\mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ nem izomorfak, mert a negyedrendű tényezők száma az egyik felbontásban kettő, a másikban egy. Az eredmény 6-ra 1, 8-ra 3, 16-ra 5 és 32-re 7.

II/1. $\varphi_g \circ \alpha \circ \varphi_g^{-1} = \varphi_{\alpha(g)}$, ahol φ_g a g-vel való konjugálás (vö. CSS 6/102).

II/2. a): ha karakterisztikus, akkor a belső automorfizmusokra is zárt. b): ciklikus csoportban adott rendű részcsoport csak egy van, tehát csak önmagába mehet. Ugyanez indokolja e)-t is. f): $\{e, t\} \lhd \{e, t, f^2, f^2t\} \lhd D_4$. g): G belső automorfizmusai N-re megszoríthatók, és a megszorítás N-nek automorfizmusa.

II/3, 4, 6. CSS 5/161, CSS 5/101, CSS 5/173.

II/5. a): D_n (N a forgatások). b): D_4 ($N = \{e, t, f^2, f^2t\}$). c): A_4. d): S_4. e:) Direkt felbonthatatlan, 24 elemű csoport, ami sem S_4-gyel, sem D_{12}-vel nem izomorf . f:) Ez az a 12 elemű nemkommutatív csoport, ami sem nem A_4, sem nem D_6 (mert van negyedrendű eleme).

II/7. Ha G és H ilyen, akkor $G = \langle a, b\rangle$, $H = \langle c, d\rangle$, ahol $|a| = |c| = p$, $|b| = |d| = q > p$, és $aba^{-1} = b^t$, valamint $cdc^{-1} = d^s$. Itt $t, s \in \mathbb{Z}_q^\times$, és mindkettő p rendű. Mivel van primitív gyök mod q, ezért $\mathbb{Z}_q^\times$ ciklikus, tehát $s = t^k$ alkalmas $(k, p) =$ 1-re. Az $a^i b^j \mapsto c^{ki} d^j$ izomorfizmusa lesz G-nek H-ra (vö. CSS 5/190).

II/8. $PN/N \cong P/P \cap N$, tehát PN/N egy p-részcsoportja G/N-nek. Indexe viszont nem osztható p-vel, mert $|G/N : PN/N| = |G|/|PN| = |G||P \cap N|/|P||N| = |G : P|/|N : N \cap P|$, s ez osztója $|G : P|$-nek. Tehát PN/N tényleg p-Sylow G/N-ben. Ez az átalakítás azt is mutatja, hogy $|N : N \cap P|$ sem osztható p-vel.

II/9. Lásd S 4.65. Tétel.

III/1. Minden Abel-csoport nilpotens, és minden nilpotens csoport feloldható. S_3, S_4, A_4 feloldhatók, de egyik sem nilpotens, mert centrumuk triviális. Az A_5 nem is feloldható. A D_n mindig feloldható, és akkor és csak akkor nilpotens, ha 2-csoport, azaz ha n egy kettő-hatvány, különben egynél több 2-Sylow van (I/6). Abel-csoport kommutátor-részcsoportja mindig $\{e\}$, $S_3' = A_3$, $S_4' = A_4$, A_4' a négyelemű Klein-normálosztó, $A_5' = A_5$, $D_n' = \langle f^2\rangle$ (ennek rendje n ha n páratlan, $n/2$ ha n páros). $\Phi(\mathbb{Z}_n^+)$ az egyetlen m rendű részcsoport, ahol m-ben az n minden prímosztója eggyel kisebb kitevőn van, mint n-ben. A Klein-csoport Frattini-részcsoportja nulla. $\Phi(S_n) = \Phi(A_n) = \{id\}$, mert a stabilizátorok maximális részcsoportok. $\Phi(D_n) = \Phi(\langle f\rangle)$ (használjuk fel, hogy D_n minden részcsoportja ciklikus vagy diéder (vagy D_2=Klein)).

III/2. Mivel P nem Abel, $P/Z(P)$ nem ciklikus, tehát rendje p^2, ezért Abel, és így $P' \leq Z(G)$. De $P' \neq \{e\}$, mert P nem Abel. Mivel P nilpotens $P' \leq \Phi(P)$. De $P/Z(P)$ nem ciklikus, így $\Phi(P) \leq Z(P)$.

III/3. Legyen $N_t = \{1 + x \mid x \in I^t\}$, belátjuk, hogy ez centrális lánc. Valóban, ha $x \in G = N_1$, és $z \in N_t$, akkor az $[1 + x, 1 + z]$ kommutátort az $(1 + y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 \ldots$ képlettel kiszámíthatjuk, és az eredményben csupa legalább $t + 1$ tényezős szorzat lesz az 1-en kívül (hiszen a z elem t tényezős szorzatok összege). Tehát $[G, N_t] \leq N_{t+1}$, és így $N_i \triangleleft G$ (hiszen a centrum minden részcsoportja normálosztó).

III/4. CSS 6/217.

III/5. Ha N minimális normálosztó G-ben, akkor II/9 miatt feloldható, és így $N' < N$. De N' karakterisztikus, ezért II/2/g miatt $N' \triangleleft G$, és így N minimalitása miatt $N' = \{e\}$, azaz N Abel. Ugyanez a gondolatmenet II/2/c-vel fűszerezve adja, hogy $N = N[p]$ alkalmas prímre, azaz N vektortér $\mathbb{Z}_p$ felett.

III/6. A $\mathbb{Z}_p$ felett minden összegtartó leképezés lineáris (mert a test minden eleme 1-ek összege).

III/7. G rendje szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen M maximális részcsoport G-ben, és N tetszőleges minimális normálosztó. Ekkor NM részcsoport, és így vagy M, vagy G. Az első esetben $N \subseteq M$, tehát $|G/M : M/N| = |G : M|$ és M/N maximális G/N-ben, tehát indukcióval kész vagyunk. A második esetben $|G| = |N||M|/|N \cap M|$ mutatja, hogy $|G : M|$ osztója $|N|$-nek, ami III/5 miatt prímhatvány.

III/8. A két oldal generátorai egymással kifejezhetők.

III/9. Tegyük fel, hogy $x \in \Phi(G)$, és hogy $\langle x, X\rangle = G$, de $\langle X\rangle < G$. Legyen M az $\langle X\rangle$-et tartalmazó de x-et nem tartalmazó részcsoportok között tartalmazásra maximális (ilyen végtelen G esetén is van a Zorn-lemma miatt). Ekkor M maximális részcsoport, hiszen $M < H$ esetén H tartalmazza x-et és X-et is, tehát $H = G$. Így $x \in \Phi(G) \leq M$, ami ellentmondás. Megfordítva, tegyük fel, hogy $x \notin \Phi(G)$. Ekkor van olyan M maximális részcsoport, hogy $x \notin M$. Így $X = M$ mutatja, hogy x nem-generátor.

III/10. A P minden M maximális részcsoportja normálosztó (hiszen minden p-csoport nilpotens). Tehát G/M-nek csak a két triviális részcsoportja van, és így $|G/M| = p$. Ezért $g \in P$ esetén $g^p \in M$. Ez mindegyik maximális részcsoportra igaz, tehát a metszetükre is, vagyis $P/\Phi(P)$ exponense p (és $P' \leq \Phi(P)$ miatt Abel-csoport is). Legyen most X tetszőleges generátorrendszer P-ben. Ekkor X képe $P/\Phi(P)$-ben is generátorrendszer. Ez a faktor azonban $\mathbb{Z}_p$ feletti vektortérnek tekinthető, és így minden generátorrendszere legalább annyi elemű, ami a dimenzió, vagyis $|X| \geq r$. Még be kell látni, hogy P-nek van r elemű generátorrendszere. Vegyünk egy bázist $P/\Phi(P)$-ben, és minden báziselemnek egy ősképét P-ben. Ezek az ősképek $\Phi(P)$-vel együtt generálják P-t, de III/9 miatt ebből a generátorrendszerből $\Phi(P)$ elhagyható.

III/11. Legyen P egy p-Sylow $\Phi(G)$-ben. A Frattini-elv (I/10) miatt $G = \Phi(G)N_G(P)$. III/9 miatt ebből a generátorrendszerből $\Phi(G)$ elhagyható, azaz $N_G(P) = G$. Tehát P normálosztó G-ben, és így $\Phi(G)$-ben is.

III/12. CSS 6/225.

III/13. Legyen $G = N_1 > \cdots > N_k = \{e\}$ centrális lánc, és $N \lhd G$. Mivel $|N| > 1$, van olyan i, hogy $N_i \cap N$ még nem triviális, de már $N_{i+1} \cap N = \{e\}$. Ekkor $[G, N_i \cap N] \leq [G, N_i] \subseteq N_{i+1}$, másrészt $[G, N_i \cap N] \leq N$, azaz $[G, N_i \cap N] \leq N_{i+1} \cap N = \{e\}$, tehát $N_i \cap N \subseteq Z(G)$.

III/14. Tegyük fel, hogy $A < C_G(A)$. I/16 miatt $C = C_G(A) \lhd N_G(A) = G$. A G/A csoport III/17 miatt nilpotens, és így III/13 miatt a C/A normálosztója nemtriviálisan metszi a centrumát. Vagyis van olyan $g \in C$, hogy $gA \in Z(G/A)$. A centrum minden részcsoportja normálosztó, és így $\langle A, g \rangle$ normálosztó G-ben. Ez Abel-féle $g \in C$ miatt, ami ellentmond A maximalitásának.

III/15. Igaz. Nyilván $(A \times B)/(A' \times B') \cong A/A' \times B/B'$ Abel, és így $A' \times B' \geq (A \times B)'$. A fordított irányú tartalmazás kommutátorelemekkel való számolással látszik.

III/16. Az első állítást lásd S 4.65. Tétel. A második ebből következik, hiszen ha N, M feloldható normálosztók, akkor $NM/N \cong M/N \cap M$ feloldható.

III/17. A G egy centrális láncának elemeit egy H részcsoporttal elmetszve a H centrális láncát kapjuk. Centrális lánc homomorf képe is az lesz (vö. III/8). Az $A \times B$ csoportban centrális láncot úgy építhetünk, hogy először A centrális láncával felmegyünk $A \times \{e\}$-ig, innen tovább pedig B (pontosabban a vele izomorf $\{e\} \times B$) centrális láncának elemeit szorozzuk meg $A \times \{e\}$-vel (vö. III/19). A bővítésre S_3 ellenpélda.

III/18. Legyen P egy p-Sylow G-ben. Ekkor $P\Phi(N)/\Phi(N)$ (II/8 miatt) p-Sylow $G/\Phi(N)$-ben, ami a feltevés miatt nilpotens. Ezért $P\Phi(N) \lhd G$. A Frattini-elv (I/10) miatt $G = P\Phi(N)N_G(P) = \Phi(N)N_G(P)$. A moduláris szabály szerint $N = \Phi(N)(N_G(P) \cap N)$. Itt $\Phi(N)$ elhagyható (III/9), azaz $N = N_G(P) \cap N$, azaz $N \subseteq N_G(P)$. Tehát $G = \Phi(N)N_G(P) \subseteq NN_G(P) = N_G(P)$, és így $P \lhd G$.

III/19. Legyenek N és M nilpotens normálosztók. A III/19 feladat alapján kiszámolhatjuk NM alsó centrális láncának elemeit. Az jön ki, hogy az i-edik elem a $[K_1, [K_2, [K_3, \ldots [K_{i-1}, K_i]]]]$ normálosztók szorzata, ahol mindegyik K_i vagy N vagy M (az összes lehetséges módon). Ha N alsó centrális lánca n, az M-é pedig m hosszú, akkor $i \geq n + m - 1$ esetén ezek a hosszú kommutátorok mind eltűnnek, mert vagy az N betű szerepel n-szer (és az M betűket elhagyva a kommutátor csak nőhet), vagy az M szerepel m-szer.

IV/1. Legyen Y az olyan k elemű rendezett sorozatok halmaza, melyek komponensei páronként különböző X-beli elemek. Nyilván G (komponensenkénti) hatása akkor és csak akkor tranzitív Y-on, ha G hatása X-en k-tranzitív. Ilyenkor tehát Y egy orbit, és így elemszáma osztója G rendjének. A szigorú k-tranzitivitás azt jelenti, hogy G regulárisan hat Y-on, azaz a stabilizátorok triviálisak, tehát $|G| = |Y|$.

IV/2. A $0 \in V = T^n$ stabilizátora pontosan a lineáris leképezésekből áll, ennek kell szigorúan 2-, illetve 1-tranzitívnak (azaz regulárisnak) lennie. Ez azzal ekvivalens, hogy egy rögzített $v \neq 0$ vektor stabilizátora reguláris, illetve triviális. Ez utóbbi pontosan akkor igaz, ha a dimenzió egy, hiszen különben v kiegészíthető bázissá, és a második w bázisvektor önmagán kívül $v + w$-be is mehet. Tehát $\mathrm{Aff}(n, T)$ pontosan akkor szigorúan 2-tranzitív, ha $n = 1$. Tegyük most fel, hogy v stabilizátora reguláris. Ha $\lambda \in T$, $\lambda \neq 0, 1$, akkor λv fixen kell maradjon, ha v fixen marad. Ez csak úgy lehetséges, ha $T^n = \{0, v, \lambda v\}$ (azaz $n = 1$ és $|T| = 3$), vagy ha egyáltalán nincs ilyen λ, azaz $|T| = 2$. Az első esetben megoldást kapunk (ez $\mathrm{Aff}(1, 3) \cong S_3$ szigorúan 3-tranzitív hatása a háromelemű halmazon). A második esetben csak $n = 2$ jöhet szóba (különben a harmadik bázisvektor akkor is elmozdulhat, ha a második fix), és így a másik megoldás az $\mathrm{Aff}(2, 2) \cong S_4$ szigorúan 3-tranzitív hatása a négyelemű halmazon.

IV/3. Könnyű kiszámolni, hogy $\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$ művelettartó, és magja a skalármátrixokból (az egységmátix skalárszorosaiból) áll. A homomorfizmus-tétel szerint tehát $\mathrm{Im}(\varphi) = L(T) \cong \mathrm{GL}(2, T)/\mathrm{Ker}(\varphi) = PGL(2, T)$. Az $L(T)$ csoportban a 0 stabilizátora $\mathrm{Aff}(1, T)$, ami IV/2 miatt szigorúan 2-tranzitív.

IV/4. Tranzitív hatásban a stabilizátorok konjugáltak (TIX/21), ekvivalens hatásokban a stabilizátorok ugyanazok a részcsoportok. Ha tehát a H szerinti mellékosztályokon való hatás ekvivalens a K szerinti mellékosztályokon való hatással, akkor (mivel H is és K is stabilizátorok a megfelelő hatásban), H és K konjugáltak. Megfordítva, ha K konjugáltja H-nak, akkor (TIX/21 miatt) K is stabilizátor a H szerinti hatásban. De előadáson láttuk, hogy minden tranzitív hatás ekvivalens egy tetszőleges stabilizátor szerinti mellékosztályokon való hatással, tehat a H szerinti mellékosztályokon való hatás ekvivalens a K szerintivel.

IV/5. TIX/21 miatt gHg^{-1} a $g(a)$ stabilizátora. Mivel $g \notin H$, ezért $g(a) \neq a$. Tehát $G \cap gHg^{-1}$ elemei két pontot stabilizálnak, és Frobenius-csoportban ilyen elem csak az identitás lehet. Megfordítva, a H szerinti mellékosztályokon való hatásban a stabilizátorok TIX/21 miatt pontosan H konjugáltjai.

IV/6. Mivel G Frobenius-csoport, IV/5 szerint $N_G(H) = H$, azaz H-nak $|G : H|$ darab konjugáltja van, és ezek diszjunktak, tehát uniójuk elemszáma $1 + |G : H|(|H| - 1) = |G| - |G : H| + 1$. Az N a csoport többi eleméből és az egységelemből áll, azaz $|N| = |G : H|$. Továbbá a magban fixpontmentes elemek vannak, ezért $N \cap H = \{e\}$, és így $|NH| = |N||H| = |G|$. Vagyis $NH = G$, és így tényleg szemidirekt szorzatot kapunk. Abból, hogy $G = NH$, következik, hogy G (bármely halmazon való) hatását meghatározza a H illetve az N hatása. A H szerinti bal mellékosztályokat nH alakban írhatjuk, ahol az $n \in N$ elemet az nH mellékosztály egyértelműen meghatározza. Ez bijektív megfeleltetést ad a H szerinti (bal) mellékosztályok és N elemei között. Ha $g \in N$, akkor a g-vel szorzás az nH-t gnH-ba viszi, és itt $gn \in N$, tehát N elemei eltolásként hatnak. Ha viszont $g \in H$, akkor $gnH = gng^{-1}H$, és itt $gng^{-1} \in N$, tehát H elemei konjugálással hatnak.

IV/7. A Frobenius-csoportok közül ki szokás zárni a reguláris csoportokat. A feladat a felsorolt csoportok „természetes” hatására vonatkozik: S_3 az $\{1, 2, 3\}$ halmazon; D_{2n+1} a szabályos $2n + 1$-szög csúcsain hat (a mag a forgatásokból áll, a kételemű komplementumokat egy-egy tükrözés generálja, az előbbi hatás ennek speciális esete ha $n = 1$); A_4 az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon hat (a mag a négyelemű Klein-normálosztó, a komplementumok a stabilizátorok, azaz a 3-Sylowok); $\mathrm{Aff}(1, T)$ a T testen hat (a mag az $x + b$ alakú leképezésekből, azaz az eltolásokból áll, a komplementumok a $T^{\times}$ csoporttal izomorfak); végül ha $p < q$ akkor a pq rendű nemkommutatív csoportban a mag a q-Sylow, a komplementumok a p-Sylowok (és $p \mid q - 1$).

IV/8. Az, hogy minden $h \in H$ esetén $\varphi(h)$ fixpontmentes automorfizmusa legyen N-nek.

IV/9. $\mathrm{Aff}(V)$-ben az $x \mapsto x + v$ ($v \in V$) eltolások V-vel izomorf normálosztót alkotnak, aminek az $x \mapsto Ax$ alakú leképezések ($\mathrm{GL}(V)$-vel izomorf) részcsoportjával vett szemidirekt szorzata lesz $\mathrm{Aff}(V)$.

IV/10. Előadáson láttuk, hogy ha N tranzitív normálosztó G-ben, és H egy stabilizátor, akkor $G = NH$. Speciálisan $N = \Phi(G)$ esetén ebből a generátorrendszerből (III/9 miatt) $\Phi(G)$ elhagyható. Tehát $H = G$. De ha N tranzitív, akkor G is az, tehát $n = 1$ és $|G| = 1$.

IV/11. $\mathrm{T}(n, T)$ az $\mathrm{U}(n, T)$ normálosztónak és a diagonális mátrixok részcsoportjának szemidirekt szorzata. Utóbbi Abel, előbbi nilpotens (III/3), és a feloldhatóság bővítésre zárt.

IV/12. Mivel $I + I^{ij}$ inverze $I - I^{ij}$, a kérdéses kommutátort ki lehet számolni. Ezután indukcióval látjuk, hogy $I + I^{1j}$ benne van bármelyik centrális lánc felülről számított $j - 1$-edik elemében ($j \geq 2$).

IV/13. Az $I + I^{ij} \in \mathrm{SL}(n, T)$ alakú mátrixokkal való felcserélhetőséget kell felírni.

IV/14. A kételemű test felett minden nem nulla skalár 1, ezért $\mathrm{GL}(n, 2) = \mathrm{SL}(n, 2) = \mathrm{PGL}(n, 2) = \mathrm{PSL}(n, 2)$. Nyilván $\mathrm{GL}(2, 2)$ a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$, azaz a Klein-csoport automorfizmus-csoportja, ami S_3 (I/17). IV/3 szerint $\mathrm{PGL}(2, 3) \cong L(3)$, ami négyelemű halmazon hat szigorúan 3-tranzitívan, vagyis ez a csoport izomorf S_4-gyel (vö. IV/2 is). Ebben $\mathrm{PSL}(2, 3)$ egy 2 indexű normálosztó, ami csak A_4 lehet (V/7).

IV/15. I/3 miatt minden valódi részcsoport indexe legalább 5, és ha találunk egy 5 indexű részcsoportot, akkor készen is vagyunk, mert akkor G beágyazható S_5-be, de mivel egyszerű, A_5-be is. A szokásos eljárással kapjuk, hogy az 5-Sylowok száma 6, tehát az ötödrendű elemeké 24, a 3-Sylowok száma pedig 10 (mert 4 indexű részcsoport nincs), és így 20 harmadrendű elem van. Végül a 2-Sylowok száma csak 15 lehet. Ezek diszjunktan nem férnek el, tehát előfordul, hogy $H = P_1 \cap P_2$ kételemű, ahol P_1 és P_2 2-Sylowok. De akkor $N_G(H)$ tartalmazza (a kommutatív) P_1 és P_2 részcsoportokat, és így indexe legfeljebb 5.

IV/16. $|\mathrm{U}(n, p)| = p^{n(n-1)/2}$ (p-hatvány), és $|\mathrm{GL}(n, p)|/p^{n(n-1)/2}$ könnyen láthatóan nem osztható p-vel.

IV/17. A Cayley-tétel szerint G felfogható, mint egy n elemű halmazon ható permutációcsoport. Válasszuk ezt a halmazt egy vektortér bázisának, és rendeljük hozzá mindegyik permutációhoz azt a lineáris transzformációt, ami a bázison a permutációnak megfelelően hat. Ez beágyazza G-t $\mathrm{GL}(n, p)$-be. Ha G egy p-csoport, akkor G képe benne van $\mathrm{GL}(n, p)$ egy p-Sylowjában, ami IV/16 miatt izomorf $\mathrm{U}(n, p)$-vel.

V/1. A_3 igen, mert tranzitív és prímfokú. A_4 is, mert 2-tranzitív. Az A_4 Klein-normálosztója nem primitív, mert reguláris, viszont a Klein-csoportban három valódi részcsoport is van (tehát a stabilizátorok nem maximálisak). A D_n pontosan akkor primitív a sokszög csúcsain, ha n prím (vö. III/1-ben D_n maximális részcsoportjainak leírásával is). A kocka szimmetriacsoportja nem primitív a csúcsokon (a testátlók végpontjai kongruenciát adnak, melynek négy darab kételemű osztálya van), sem a lapokon (szemköztes lappárok), sem az éleken („távoli" párhuzamos élpárok). Végül $\mathrm{Aut}(G)$ pontosan akkor primitív $G-\{e\}$-n, ha $G \cong \mathbb{Z}_3^+$, vagy $G \cong \mathbb{Z}_2^n$. Valóban, már a tranzitivitásból is következik, hogy G elemi Abel. Egy nem nulla v vektor stabilizátoránal nagyobb részcsoport az a $H \leq \mathrm{Aut}(G)$, ami a v vektort valamilyen skalárszorosába viszi, kivéve ha a test kételemű. Ha viszont $H = \mathrm{GL}(n,p)$, akkor $n = 1$, és ekkor a primitivitás azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{Z}_p^\times$-nak nincs nemtriviális részcsoportja, azaz $p-1$ prím. A $\mathbb{Z}_2^n$ jó, mert könnyű kiszámolni, hogy tetszőleges olyan A, melyre $A(v) \neq v$, a v stabilizátorával együtt generálja $\mathrm{GL}(n,2)$-t.

V/2. Az orbitok kongruenciát alkotnak, tehát ha a hatás primitív, akkor ez a kongruencia vagy 1_X (azaz a hatás tranzitív), vagy 0_X (amikor minden elem identikusan hat). Az utóbbi esetben minden partició kongruencia, tehát ha csak triviális kongruencia van, akkor a pontok halmaza kételemű.

V/3. Primitív csoportban minden stabilizátor maximális részcsoport. Nilpotens csoportban minden maximális részcsoport normálosztó, és mivel a faktornak csak triviális részcsoportjai vannak, a faktor prímrendű. A stabilizátorok konjugáltak, és mivel normálosztók is, egyenlők. Ezért egy stabilizátor egy eleme minden elemet fixál, tehát az identitás. Így a stabilizátor csak az egységelemből áll, vagyis a csoport prímrendű.

V/4. Tegyük fel, hogy $\sim$ kongruencia X-en. Legyen $b \in X$, és K azon N-beli n elemek halmaza, melyekre $n(b) \sim b$. Belátjuk, hogy $K \triangleleft G$. Legyen $g \in G$ és $n \in K$. Mivel N tranzitív, van olyan $m \in N$, hogy $m(b) = g^{-1}(b)$. Mivel N Abel, $nm = mn$, tehát $ng^{-1}(b) = nm(b) = mn(b) \sim m(b) = g^{-1}(b)$, és innen $gng^{-1}(b) = b$, azaz $gng^{-1} \in K$. Az nyilvánvaló, hogy K részcsoport, és így normálosztó. Az N minimalitása miatt $K = \{e\}$ vagy $K = N$. Az első esetben $\sim$ a 0_X (hiszen az osztályai egyformák). A másodikban N tranzitivitása miatt b osztálya az egész X. (A feladatot könnyebb úgy megoldani, hogy „lefordítjuk" az állítást egy stabilizátor mellékosztályain való reprezentációra, és így „tiszta" csoportelméleti állítást kapunk.)

V/5. G tranzitív, így $|X|\,\big|\,|G|$, azaz $|G|$ páros. Tegyük fel, hogy $|G| = 4k+2$. Ekkor I/8 miatt G-ben van egy kettő indexű N normálosztó. Mivel G primitív, N tranzitív, és így $|X|\,\big|\,|N|$, ami lehetetlen, mert $|N|$ páratlan.

V/6. Ha H stabilizátor, akkor a konjugáltjai a többi stabilizátorok. A konjugáltak száma maximum $|G:H|$, tehát a stabilizátorok uniója maximum $1+|G:H|(|H|-1) < |G|$ elemszámú (kivéve ha $H = G$, azaz $|G| = 1$).

V/7. Ha $n \geq 5$, akkor S_n-nek kompozíciólánca $\{id\} \triangleleft A_n \triangleleft S_n$. Ezért a Jordan-Hölder miatt $N \triangleleft S_n$ esetén N-nek vagy rendje, vagy indexe kettő. Utóbbi nem lehet, mert akkor $N \cap A_n$ kettő indexű (tehát valódi) normálosztó lenne A_n-ben. Az előbbi sem, mert $Z(S_n) = \{id\}$ ha $n > 2$. A továbbiakat lásd S 4.85. Tétel.

V/8, 10. CSS 6/102, CSS 6/233.

V/9. Legyen X az F szabad generátorrendszere, és válasszuk ki minden $x \in X$ esetén a $\varphi(x)$ elem egy tetszőleges ősképét α-nál. Legyen $\psi(x)$ ez az őskép. Mivel F szabad, ψ-t kiterjeszthetjük homomorfizmussá.

V/11. Az $x^i y x^{-i}$ $(i > 0)$ elemek szabad generátorredszert alkotnak az általuk generált részcsoportban.

V/12. a) D_6 (minden elem $t^i f^j$ alakúra hozható, tehát legfeljebb 12 elem van, viszont D_6 kielégíti a relációkat). b) Q (minden elem $c^i d^j$ alakú). c) Ez a 21 elemű nemkommutatív csoport (minden elem $c^i d^j$ alakú). Érdemes megemlíteni, hogy a látszólag nagyon hasonló $\langle c, d \mid c^7 = d^3 = 1,\ dcd^{-1} = c^3 \rangle$ csoport csak $\mathbb{Z}_3^+$ (mert $c = d^3 c d^{-3} = c^{27}$ miatt $c = 1$). d) Ez a II/5/f)-beli csoport. e) A_4. Indoklás: legyen $c = aba^{-1}$ és $d = a^{-1}ba$. Ezek négyzete 1, és $cd = ababa = b$. Ezért $(cd)^2 = 1$, ahonnan $cd = dc$. Az a elem körbekonjugálja c, d, b-t, és ezért $\{1, c, d, b\}$ normálosztó, a szerinte vett faktort a generálja. Így $|G| \leq 4 \cdot 3 = 12$. Másrészt $a \mapsto (123)$, $b \mapsto (12)(34)$ nyilván teljesíti a relációkat, és ezért a keresett csoportnak A_4 homomorf képe. f) S_4. Indoklás: legyen $v = (ab)^2$, ekkor $v^2 = 1$. Ha $u = a^2$, akkor persze $u^3 = 1$. Továbbá $(uv)^3 = (bab)^3 = 1$. Ezért u és v kielégíti az e)-beli definiáló relációkat, és így $N = \langle u, v \rangle$ elemszáma legfeljebb 12. Belátjuk, hogy N normálosztó. Persze $a = u^2 \in N$, tehát elég megmutatni, hogy N zárt a b-vel való konjugálásra. De $bub = (bab)^2$, viszont $bab = a^{-1}v \in N$. Így $bvb = (bab)a \in N$ is igaz. Az N indexe legfeljebb 2, hiszen a szerinte vett faktort b generálja. Ezért $|G| \leq 24$. Másrészt $a \mapsto (123)$, $b \mapsto (14)$ nyilván jó. g) $\mathbb{Z}_6^+$. h) $D_4 \times \mathbb{Z}_2$. (Az utolsó két csoport esetében lásd CSS 6/243).