Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Kilencedik (utolsó) feladatsor — könnyű Galois-elméleti gyakorló feladatok

1. *Igaz-e, hogy* $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}+1)$*?*

2. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$*.*

3. *Igazoljuk, hogy ha* $\alpha \neq 0$*, akkor* $K(\alpha, \beta) = K(\alpha, \alpha\beta)$*.*

---

4. *Írjuk fel az* $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ *szám reciprokát* $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ *alakban (ahol* $a, b, c \in \mathbb{Q}$*).*

5. *Legyen* θ *az* x^3+3x+1 *polinom (egyetlen) valós gyöke. Írjuk fel a* $\theta^5+2\theta^3$ *és a* $\theta/(\theta-3)$ *számokat* $a + b\theta + c\theta^2$ *alakban, ahol* $a, b, c \in \mathbb{Q}$*. Mi a* θ *minimálpolinomja* $\mathbb{Q}$ *fölött?*

6. *Határozzuk meg az alábbi számok minimálpolinomját a racionális test felett:* π, $1+i$, $\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $1+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $\cos 20°$*, egy primitív* n*-edik egységgyök.*

7. *Legyen* $L \cong \mathbb{Z}_2/(x^2+x+1)$ *a négyelemű test. Írjuk fel az összes elem minimálpolinomját a prímteste fölött.*

---

8. *Felírható-e* $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ *alakban a* $\sqrt[6]{2}$ *illetve a* $\sqrt{2}$*, ahol* a, b, c *racionális számok?*

9. *Határozzuk meg* $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}|$ *értékét.*

10. *Mutassuk meg, hogy ha* $K \leq L$ *egy testbővítés,* $\alpha, \beta \in L$*, és* $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ *és* $\mathrm{gr}_K(\beta)$ *relatív prímek, akkor* $|K(\alpha, \beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$*.*

11. *Határozzuk meg* $\sqrt[4]{2}$ *fokát a* $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ *és a* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ *felett.*

12. *Legyen* θ *nem valós gyöke az* x^3-2 *polinomnak. Határozzuk meg* θ *fokát* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *felett, és a* $\mathbb{Q}(\theta) \cap \mathbb{R}$ *testet. Igaz-e, hogy ha* $K \leq L \leq M$*, és* $\alpha \in M$*, akkor* $\mathrm{gr}_L(\alpha) \mid \mathrm{gr}_K(\alpha)$*?*

13. *Számítsuk ki az alábbi fokszámokat: a)* $|\mathbb{Q}(\cos 23° + i \sin 23°) : \mathbb{Q}|$*; b)* $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}|$*; c)* $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *felett; d)* $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}$ *felett.*

---

14. *Bizonyítsuk be, hogy ha* a *és* b *valós, akkor* $a + bi$ *pontosan akkor algebrai (*$\mathbb{Q}$ *felett), ha* a *is és* b *is az.*

15. *Az alábbi számok közül melyek algebraiak, és melyek transzcendensek:* $\pi + 3$, $5\pi + 6$, $\pi + \sqrt{2}$, $\pi^2 + 2\pi + 2$, $\sqrt{\pi}$*.*

16. *Egy algebrai szám és egy transzcendens szám összege mikor algebrai? És a szorzatuk? Egy algebrai szám négyzete lehet-e transzcendens? És a négyzetgyöke?*

17. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Q}$ *egyetlen véges bővítése sem lehet algebrailag zárt. Mutassuk meg, hogy a* $\mathbb{Z}_p$ *test nem algebrailag zárt. Melyek az algebrailag zárt véges testek?*

18. *Igazoljuk, hogy algebrai bővítések egymásutánja is algebrai.*

FORDÍTS!

19. *Lineárisan független-e* $\{1, i, \sqrt{2}+3i\}$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett;* $\{1, i, \sqrt{2}+3i\}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett;* $\{1, \pi, 1/\pi\}$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett?*

20. *Igaz-e, hogy* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$*?*

21. *Legyen* K *részteste* $\mathbb{C}$*-nek, és* b*,* c *racionális számok. Tegyük fel, hogy* $\sqrt{b} \in K(\sqrt{c})$*. Bizonyítsuk be, hogy ekkor* $\sqrt{b} \in K$*, vagy* $\sqrt{b/c} \in K$*.*

22. *Legyen* b *négyzetmentes racionális szám (azaz két négyzetmentes egész hányadosa), és* $p_1, \ldots, p_n$ *prímek. Tegyük fel, hogy* $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}_1, \ldots, \sqrt{p}_n)$*. Bizonyítsuk be, hogy* b *kanonikus alakjában csak* $p_1, \ldots, p_n$ *szerepelhet. Ennek alapján mutassuk meg, hogy a prímszámok négyzetgyökei lineárisan függetlenek* $\mathbb{Q}$ *felett.*

23. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$*.*

---

24. *Az alábbiak végrehajtásával határozzuk meg a* $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ *test összes résztestét.*

a) Normális-e a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ *bővítés?*
b) Normális-e a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ *bővítés?*
c) Legyen G *a b)-beli bővítés Galois-csoportja, és* $\varphi \in G$*. Mi lehet* $\varphi(i)$ *és* $\varphi(\sqrt[4]{2})$*?*
d) Mutassuk meg, hogy ha $\varphi, \psi \in G$*,* $\varphi(i) = \psi(i)$*, és* $\varphi(\sqrt[4]{2}) = \psi(\sqrt[4]{2})$*, akkor* $\varphi = \psi$*.*
e) Az előző két pont alapján igazoljuk, hogy G *elemszáma legfeljebb* 8*.*
f) A főtétel alapján mennyi G *elemszáma?*
g) Legyen $\alpha_1 = \sqrt[4]{2}$*,* $\alpha_2 = i\alpha_1$*,* $\alpha_3 = -\alpha_1$*,* $\alpha_4 = -i\alpha_1$*. Igazoljuk, hogy ha* φ *és* ψ *megegyezik az* α_1 *és* α_2 *helyeken, akkor* $\varphi = \psi$*.*
h) Mi az összefüggés $\varphi(\alpha_1)$ *és* $\varphi(\alpha_3)$ *között?*
i) Mutassuk meg, hogy ha az α_1*,* α_2*,* α_3*,* α_4 *számokat ebben a sorrendben egy négyzet csúcsaira írjuk, akkor* G *minden eleme a négyzetnek szimmetriája lesz, és így* $G \cong D_4$*.*
j) Legyen $\varphi \in G$ *az* (13) *permutációnak megfelelő eleme* G*-nek. Írjuk fel* $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ *egy bázisát* $\mathbb{Q}$ *felett, egy általános elem képét* φ*-nél, és* φ *fixpontjainak halmazát.*
k) Legyen $H = \{id, (24)\}$*. Mely testek felelnek meg a* H*-t tartalmazó részcsoportoknak?*
l) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ *minden részteste tartalmazza* $\mathbb{Q}$*-t.*

25. *Határozzuk meg az alábbi polinomok felbontási testének fokát* $\mathbb{Q}$ *felett:* x^2+1*,* x^4-1*,* x^4+1*,* x^6-1*,* x^6-2*,* $(x^2-2)(x^3-2)$*,* $(x^2-2)(x^2-3)$*. Határozzuk meg minél több esetben a Galois-csoportot és a közbülső testeket is.*

26. *Mutassuk meg, hogy minden másodfokú bővítés normális.*

27. *Mutassuk meg, hogy ha* $K \leq L \leq M$*, és* M/K *normális, akkor* M/L *is az.*

28. *Legyenek* $p_1, \ldots, p_k$ *páronként különböző pozitív prímszámok. Határozzuk meg a* $\mathbb{Q}(\sqrt{p}_1, \ldots, \sqrt{p}_n)$ *Galois-csoportját* $\mathbb{Q}$ *felett.*

29*. *Mutassuk meg, hogy ha* $K \leq L \leq \mathbb{C}$*, és* K/L *negyedfokú, akkor ennek a bővítésnek kettő, három, vagy öt közbülső teste lehet.*

30*. *Adjuk meg* $\mathbb{Q}$*-nak egy harmadfokú, normális bővítését.*

$\infty^{********}$**.** *Igaz-e, hogy minden véges* G *csoporthoz van* $\mathbb{Q}$*-nak olyan normális bővítése, melynek Galois-csoportja* G*-vel izomorf? (Ez híres* **megoldatlan probléma***, az állítást Safarevics belátta akkor, ha* G *feloldható).*