**Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév**

*Nyolcadik alkalom*

Egy főideálgyűrű feletti $M$ mátrix $k$-adik *determinánsosztójának* nevezzük az összes $k \times k$-as részmátrix determinánsainak legnagyobb közös osztóját, ennek jele $\Delta_k(M)$; $\Delta_0(M) = 1$. A $k$-adik *elemi osztó* $\Delta_k(M)/\Delta_{k-1}(M)$, illetve nulla, ha $\Delta_{k-1}(M) = 0$.

**1.** *Legyen $M = \mathbb{R}^3$ a $pv = p(A)v$ definícióval $\mathbb{R}[x]$-modulus, ahol*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Igazoljuk, hogy $u$ generálja $M$-et (azaz $M$ ciklikus).*
b) *Adjunk meg egy „szép" bijekciót $M$ részmodulusai és $x(x-1)^2$ osztói között.*

**2.** *Az alább megadott $M$ modulusok megadott $X$ generátorrendszeréhez készítsük el az alaptétel bizonyításában használt mátrixot, hozzuk ezt normálalakra, és ennek alapján bontsuk fel $M$-et ciklikus modulusok direkt összegére.*
a) *$M = \mathbb{Z}_6^+$ a $\mathbb{Z}$ felett, $X = \{2, 3\}$.*
b) *$M = \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ a $\mathbb{Z}$ felett, $X = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.*
c) *$M = \mathbb{C}^n$ mint a $\mathbb{C}[x]$ feletti, az alább megadott mátrixokhoz tartozó szokásos modulus, $X$ pedig $\mathbb{C}^n$ szokásos bázisa.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

**3.** *Hogyan olvashatók le a determinánsosztók és az elemi osztók a mátrix normálalakjából? Mutassuk meg, hogy elemi átalakítások során a determinánsosztók (asszociáltság erejéig) nem változnak, és ezért a normálalak egyértelmű.*

**4.** *Az alábbiakban megadjuk egy-egy komplex elemű (ismeretlen) karakterisztikus mátrix determinánsosztóit (összesen 6 mátrixét). Döntsük el, van-e ilyen mátrix, és ha igen, akkor adjuk meg a minimálpolinomját és a Jordan-féle normálalakját.* $\{1, 1, x^2\}$, $\{1, x, x^2, x^3\}$, $\{1, 1, x, x^3\}$, $\{1, 1, x^2, x^3\}$, $\{1, 1, 1, x^3\}$, $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x, x^2(x-1)^2, x^5(x-1)^4\}$.

**5.** *Adjuk meg az alábbi mátrixokhoz tartozó karakterisztikus mátrix normálalakját, és ennek alapján számítsuk ki minimálpolinomjukat és Jordan-alakjukat.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**6.** *Igazoljuk, hogy végtelen test felett egy lineáris transzformációnak akkor és csak akkor van véges sok invariáns altere, ha minimálpolinomjának foka megegyezik a tér dimenziójával. Hány invariáns altér van ilyenkor?*

**7.** *Legyen $R$ főideálgyűrű, $M$ egy unitér $R$-modulus, és $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_\ell$ bázis $M$-ben. Tegyük fel, hogy $p \in R$ prím, és $c_i$ rendje $p^{\alpha_i}$, ahol $\alpha_i > 0$, viszont a $d_j$ elemek rendje nem osztható $p$-vel. Bizonyítsuk be, hogy $M[p]$-ben, mint az $R/(p)$ test fölötti vektortérben, bázist alkotnak a $p^{\alpha_i - 1}c_i$ elemek ($1 \le i \le k$).*