Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Hetedik alkalom

Ha M egy R-modulus, és $X \subseteq M$, akkor $\operatorname{ann}(X) = \{r \in R \mid rX \subseteq \{0\}\}$ az X *annulátora*. Az M modulus *hű*, ha $\operatorname{ann}(M) = \{0\}$. Az $\{m\}$ annullátorát (és ha R főideálgyűrű, akkor ennek az ideálnak a generátorelemét is) az $m \in M$ elem *rendjének* nevezzük, jele $o(m)$.

1. *Modulusok, illetve unitér modulusok-e az alábbi struktúrák? Határozzuk meg a részmodulusokat, és a rendeket is, valamint, hogy mikor hű a kapott modulus.*

a) Egy A Abel-csoport $\mathbb{Z}$ felett, ahol $n \circ a = na$ jelentése a szokásos.

b) Egy m exponensű A Abel-csoport $\mathbb{Z}_m$ felett, ahol $n \circ a = na$ jelentése a szokásos.

c) Ha T test, akkor T^n a $T^{n\times n}$ felett a mátrix-vektor szorzásra.

d) Ha V vektortér a T test felett, és $A \in \operatorname{Hom}(V)$, akkor V a $T[x]$ felett a $p \circ v = p(A)v$ szorzásra. Hogyan kapcsolódik a rend fogalma a tavaly tanult $m_{A,v}$ polinomokhoz?

e) Ha S részgyűrűje R-nek, akkor R az S felett, ahol az összeadás az R-beli összeadás, és $s \circ r = sr$ (R-beli szorzás).

f) Ha S balideálja R-nek, akkor S az R felett, ahol az összeadás az S-beli összeadás, és $r \circ s = rs$ (R-beli szorzás).

2. *Mutassuk meg, hogy $\operatorname{ann}(X)$ balideál, és ha X részmodulus, akkor kétoldali ideál.*

3. *Igazoljuk, hogy ha M egy R-modulus, akkor M hű modulussá tehető $R/\operatorname{ann}(M)$ fölött.*

4. *Legyen A Abel-csoport, és R az A endomorfizmusainak gyűrűje a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra. Mutassuk meg, hogy a $\varphi \circ a = \varphi(a)$ az A-t baloldali R-modulussá teszi. Igazoljuk azt is, hogy az A akkor és csak akkor tehető hű modulussá egy S gyűrű fölött, ha S izomorf az R egy részgyűrűjével.*

5. *Tegyük $\mathbb{R}$ additív csoportját modulussá $\mathbb{R}[x]$ felett kétféleképpen. Az első modulus szorzása $p(x) \circ r = p(1)r$, a másodiké $p(x) \circ r = p(2)r$. Izomorf modulusokat kaptunk-e?*

6. *Általánosítsuk a hatvány rendjének képletét főidálgyűrű feletti modulusokra.*

7. *Igazoljuk, hogy ha R főideálgyűrű, és M egy R-modulus, akkor azok az M-beli elemek, melyek rendje nem nulla, egy részmodulust alkotnak (ez az M* **torzió-részmodulusa***). Igaz-e, hogy az eszerint vett faktormodulus torziómentes (azaz minden elem rendje nulla)?*

8. *Legyen R egységelemes gyűrű és M baloldali unitér R-modulus, mely egy elemmel generálható (azaz ciklikus). Mutassuk meg, hogy M izomorf R-nek mint önmaga feletti modulusnak egy J részmodulusa, azaz balideálja szerinti faktormodulusával, és adjunk meg egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést M faktormodulusai, és R-nek a J-t tartalmazó balideáljai között.*

9. *Igaz-e főideálgyűrű fölött, hogy ciklikus modulus része is ciklikus? Két ciklikus modulus direkt szorzata mikor lesz ciklikus?*

10. *Az 1/d feladatban szereplő modulus milyen A esetén ciklikus, ha a V kétdimenziós?*

11. *Bázist alkot-e a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ csoportban $\{(1,2),(1,1)\}$?*

12. *Igaz-e, hogy egy erős értelemben vett bázis mindig szabad generátorrendszer? (Az „erős értelemben” azt jelenti, hogy $\sum r_i b_i = 0 \implies r_i = 0$, és nem csak $r_i b_i = 0$).*