Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Hatodik alkalom

1. *Adjunk képletet kommutatív gyűrűben a generált ideálra.*

2. *Igaz-e, hogy a* $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ *az* $x_1, \dots, x_n$ *által generált szabad kommutatív gyűrű?*

3. *Igazoljuk, hogy ha* R *gyűrű, akkor az* $(r, n)(s, m) = (rs + rm + sn, nm)$ *szorzásra nézve az* $R^+ \times \mathbb{Z}^+$ *csoport egységelemes gyűrű, mely tartalmaz* R*-rel izomorf részgyűrűt.*

4. *Legyen* I *ideál az* R *gyűrűben. Igazoljuk, hogy az* $(a + I)(b + I) = ab + I$ *definíció reprezentánsfüggetlen, és az* R/I *faktorcsoportot gyűrűvé teszi (ennek neve faktorgyűrű). Igazoljuk, hogy* R *egy részhalmaza akkor és csak akkor ideál, ha alkalmas gyűrűhomomorfizmus magja. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a homomorfizmus-tétel, illetve a két izomorfizmus-tétel gyűrűelméleti változatát. Definiáljuk gyűrűk direkt szorzatát a csoportokéval analóg módon, és mutassuk meg, hogy a direkt szorzat csoportokra adott belső jellemzése gyűrűkre is érvényben marad, ha normálosztó helyett ideált írunk.*

5. *Izomorfak-e az alábbi gyűrűk? Itt* $\mathbb{G}$ *a Gauss-egészek gyűrűje.*
- *a)* $\mathbb{Z}/(n)$ és $\mathbb{Z}_n$.
- *b)* $(2\mathbb{Z})/(8)$ és $\mathbb{Z}_4$.
- *c)* $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ *és* $\mathbb{C}$.
- *d)* $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 2)$ *és* $\mathbb{C}$.
- *e)* $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1)$ *és* $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- *f)* $\mathbb{G}/(5)$ és $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.
- *g)* $\mathbb{G}/(3)$ *és a kilenc elemű test.*

6. *Legyen* R *azoknak a (racionális) törteknek a gyűrűje, melyek nevezője páratlan. Határozzuk meg az egységeket, a felbonthatatlanokat és a prímeket. Hány prím van asszociáltság erejéig? Igaz-e az alaptétel? Mik az ideálok? Konstruáljunk olyan alaptételes gyűrűt, melyben asszociáltság erejéig hat darab prím van. (Lásd a következő feladatot is.)*

7. *Legyen* R *kommutatív gyűrű, és* S *részfélcsoportja az* R *nem nullosztó elemeiből álló félcsoportnak. A hányadostest konstrukciójának mintájára igazoljuk, hogy az* R *beágyazható olyan egységelemes* T *gyűrűbe, melyben az* S *elemei már invertálhatók, és amelyben minden elem egy* R*-beli és egy* S*-beli elem hányadosa. Ezt az* R *feletti izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott* T *gyűrűt az* R *gyűrű* S *szerinti lokalizáltjának nevezzük.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha* R *alaptételes gyűrű, ami nem test, akkor végtelen sok prím van benne (most az asszociált prímeket is különbözőnek tekintjük).*

9. *Legyen* K *test, és jelölje* $K^\circ[x]$ *az olyan* K *feletti „polinomoknak" a gyűrűjét, amelyben az* x *kitevőjeként nemcsak nemnegatív egészek, hanem tetszőleges nemnegatív racionális számok szerepelhetnek. Igazoljuk, hogy nullosztómentes gyűrűt kaptunk, amelyben minden irreducibilis elem prím. Igaz-e a számelmélet alaptételének létezési illetve egyértelműségi állítása? Létezik-e felbonthatatlan elem* $\mathbb{C}^\circ[x]$*-ben? És* $\mathbb{Q}^\circ[x]$*-ben?*

10. *Legyen* R *egységelemes integritási tartomány. Igazoljuk az alábbi állításokat.*
- *a)* $R[x]$ *akkor és csak akkor főideálgyűrű, ha* R *test.*
- *b) Ha* R *alaptételes, és minden nem nulla ideálja véges indexű, akkor főideálgyűrű.*