Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Ötödik alkalom

1. *Az alábbi permutációcsoportokról döntsük el, hogy primitívek-e (illetve mikor azok): A_3, A_4, az A_4 csoport négyelemű normálosztója, a D_n csoport a szabályos n-szög csúcsain, a kocka szimmetriacsoportja a kocka csúcsain, élein és lapjain, tetszőleges G véges csoport automorfizmus-csoportja a $G - \{1\}$ halmazon.*

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha G egy legalább háromelemű halmazon hat, és csak triviális kongruenciája van, akkor tranzitív.*

3. *Határozzuk meg S_n primitív nilpotens részcsoportjait.*

4. *Mutassuk meg, hogy ha N minimális normálosztó a $G \leq S_X$ csoportban, és N Abel-féle és tranzitív, akkor G primitív.*

5*. *Bizonyítsuk be, hogy ha G primitív permutációcsoport egy legalább háromelemű, páros elemszámú halmazon, akkor $|G|$ osztható néggyel.*

6. *Igazoljuk, hogy minden nemtriviális, véges, tranzitív permutációcsoportban van fixpontmentes elem.*

7. *Határozzuk meg az S_n csoport összes normálosztóját.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy $G/Z(G)$ izomorf G belső automorfizmusainak csoportjával.*

9. *Igazoljuk, hogy ha F szabad csoport, akkor bárhogy is veszünk egy $\alpha : G \to H$ szürjektív csoport-homomorfizmust, az F csoport minden H-ba menő φ homomorfizmusa keresztülvezethető az α leképezésen, azaz van olyan $\psi : F \to G$ homomorfizmus, hogy $\varphi = \alpha\psi$.*

10*. *Bizonyítsuk be, hogy egy szabad csoport kommutátor-részcsoportja azokból a szavakból áll, amelyekre igaz a következő: bármelyik generátort is vesszük, azoknak a kitevőknek az összege, amin ez a generátor ebben a szóban szerepel, nullával egyenlő. (Például $x^2y^{-3}x^{-1}zx^{-1}y^2z^{-1}y$ ilyen szó, mert $2-1-1=0,\ -3+2+1=0,\ 1-1=0$.)*

11*. *Bizonyítsuk be, hogy a két elemmel generált szabad csoportnak van olyan részcsoportja, amely izomorf a megszámlálhatóan generált szabad csoporttal.*

12. *Az alábbi, definiáló relációkkal megadott csoportoknak határozzuk meg a rendjeit, és döntsük el, izomorfak-e valamelyik „ismert” csoporttal.*

a) $\langle t, f \mid t^2 = 1,\ f^6 = 1,\ tft = f^{-1} \rangle$.
b) $\langle c, d \mid c^4 = 1,\ d^2 = c^2,\ dcd^{-1} = c^{-1} \rangle$.
c) $\langle c, d \mid c^7 = d^3 = 1,\ dcd^{-1} = c^2 \rangle$.
d) $\langle c, d \mid c^6 = 1,\ d^2 = c^3,\ dcd^{-1} = c^{-1} \rangle$.
e) $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$.
f) $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^4 = 1 \rangle$.
g) $\langle a, b \mid a^3 = b^4 = 1,\ ba = ab^3 \rangle$.
h) $\langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = ba^3 \rangle$.

13***.** *Konstruáljunk végesen generált végtelen egyszerű csoportot. (Ötlet: tekintsük az $\langle x, y, z, t \mid xyx^{-1} = y^2,\ yzy^{-1} = z^2,\ ztz^{-1} = t^2,\ txt^{-1} = x^2 \rangle$ csoportot. Mutassuk meg, hogy minden véges faktora egyelemű, de ő maga nem az).*